



Л. П. Евстафьева В. А. Евстафьев

Геометрия

Дидактические материалы

7 класс

Москва

«Просвещение»

2012

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году.

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» - российской школе».

Руководители проекта: вице-президент РАН акад. *В.В. Козлов*, президент РАО акад. *Н. Д. Никандров*, д-р пед. наук, чл.-корр. РАО *А. М. Кондаков*

Научные редакторы серии: акад.-секретарь РАО, д-р пед. наук *А. А. Кузнецов*, акад. РАО, д-р пед. наук *М. В. Рыжаков*, д-р экон. наук *С. В. Сидоренко*.

Евстафьева Л. П.

Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс / Л. П. Евстафьева, В. А. Евстафьев. — М. : Просвещение, 2012. — 80 с.: ил. — (Академический школьный учебник). — ISBN 978-5-09-021187-1.

Дидактические материалы предназначены для учащихся общеобразовательных классов, работающих по учебнику А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика, Т. Г. Ходот «Геометрия. 7 класс».

Дидактические материалы содержат самостоятельные работы в четырёх вариантах к пунктам учебника и контрольные работы в двух вариантах к основным темам курса.

ISBN 978-5-09-021187-1

© Издательство «Просвещение», 2012

© Художественное оформление.

Издательство «Просвещение», 2012

Все права защищены

Содержание

Самостоятельная работа № 1 (к пп. 1.1, 1.2). Отрезки, лучи, прямые

Самостоятельная работа № 2 (к пп. 1.3, 1.4). Длина отрезка

Самостоятельная работа № 3 (к п. 1.5). Длина отрезка

Самостоятельная работа № 4 (к п. 1.5). Длина отрезка

Самостоятельная работа № 5 (к п. 1.6). Понятие о равенстве двух фигур.

Равенство треугольников

Самостоятельная работа № 6 (к пп. 2.1, 2.2). Окружность и круг

Самостоятельная работа № 7 (к п. 2.3). Центральная симметрия

Самостоятельная работа № 8 (к п. 2.4). Построения циркулем и линейкой

Самостоятельная работа № 9 (к п. 3.1). Угол, смежные углы

Самостоятельная работа № 10 (к п. 3.2). Равенство углов. Свойство равных углов

Самостоятельная работа № 11 (к пп. 3.3, 3.4). Откладывание угла. Сравнение углов. Прямой угол. Биссектриса угла

Самостоятельная работа № 12 (к п. 3.5). Биссектриса угла. Построение прямого угла

Самостоятельная работа № 13 (к п. 3.6). Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые

Самостоятельная работа № 14 (к п. 3.7). Действия с углами

Самостоятельная работа № 15 (к п. 3.8). Измерение углов

Самостоятельная работа № 16 (к п. 3.8). Измерение углов.

Самостоятельная работа № 17 (к п. 3.9). Двугранные углы

Самостоятельная работа № 18 (к пп. 4.1, 4.2). Элементы треугольника

Самостоятельная работа № 19 (к п. 4.3). Первый признак равенства треугольников

Самостоятельная работа № 20 (к п. 4.5). Теорема о внешнем угле треугольника. Классификация треугольников

Самостоятельная работа № 21 (к п. 4.6). Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра

Самостоятельная работа № 22 (к п. 4.7). Второй признак равенства треугольников

Самостоятельная работа № 23 (к п. 4.8). Высота треугольника

Самостоятельная работа № 24 (к п. 5.1). Равнобедренный треугольник

Самостоятельная работа № 25 (к п. 5.1). Равнобедренный треугольник

Самостоятельная работа № 26 (к п. 5.1). Равнобедренный треугольник

Самостоятельная работа № 27 (к п. 5.2). Серединный перпендикуляр к отрезку

Самостоятельная работа № 28 (к п. 5.4). Сравнение сторон и углов треугольника

Самостоятельная работа № 29 (к п. 6.2). Неравенство треугольника

Самостоятельная работа № 30 (к п. 7.1). Признаки параллельности прямых

Самостоятельная работа № 31 (к п. 7.1). Признаки параллельности прямых

Самостоятельная работа № 32 (к п. 7.4). Свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей

Самостоятельная работа № 33 (к п. 7.5). Построение прямоугольника. Свойства прямоугольника

Самостоятельная работа № 34 (к п. 8.1). Сумма углов треугольника

Контрольная работа № 1. Отрезки. Окружность и круг

Контрольная работа № 2. Углы

Контрольная работа № 3. Треугольники

Контрольная работа № 4. Параллельность. Сумма углов треугольника

Самостоятельная работа № 1 (к пп. 1.1, 1.2).

Отрезки, лучи, прямые

Вариант 1

1. Начертите отрезок MN и получите из него прямую MN . Возьмите точку A внутри отрезка MN , а точку B вне отрезка MN , но на луче MN .
 - а) Сколько прямых есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - б) Сколько лучей есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - в) Сколько отрезков есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - г) Что является пересечением отрезков MN и AB ?
 - д) Что является объединением лучей MB и NM ?
2. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите цветным карандашом прямую BC , луч AA_1 .
3. Изобразите пять точек так, чтобы не менее четырёх из них лежали на одной прямой. Через каждые две точки можно провести одну прямую. Сколько всего различных прямых можно провести через эти пять точек?

Вариант 2

1. Начертите отрезок KP и получите из него прямую KP . Возьмите точку A внутри отрезка KP , а точку B вне отрезка KP , но на луче KP .
 - а) Сколько прямых есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - б) Сколько лучей есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - в) Сколько отрезков есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - г) Что является пересечением отрезков KP и AB ?
 - д) Что является объединением лучей KB и PK ?
2. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите цветным карандашом прямую AB , луч DD_1 .
3. Изобразите шесть точек так, чтобы не менее пяти из них лежали на одной прямой. Через каждые две точки можно провести одну прямую. Сколько всего различных прямых можно провести через эти шесть точек?

Вариант 3

1. Начертите отрезок PQ и получите из него прямую PQ . Возьмите точку T внутри отрезка PQ , а точку B вне отрезка PQ , но на луче PQ .
 - а) Сколько прямых есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - б) Сколько лучей есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - в) Сколько отрезков есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - г) Что является пересечением отрезков PQ и TB ?
 - д) Что является объединением лучей BP и TQ ?
2. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите цветным карандашом прямую $A_1 D$, луч CB_1 .
3. Изобразите семь точек так, чтобы не менее шести из них лежали на одной прямой. Через каждые две точки можно провести одну прямую. Сколько всего различных прямых можно провести через эти семь точек? А если взять n точек так, чтобы не менее чем $(n - 1)$ точек лежали на одной прямой?

Вариант 4

1. Начертите отрезок DF и получите из него прямую DF . Возьмите точку A внутри отрезка DF , а точку M вне отрезка DF , но на луче FD .
 - а) Сколько прямых есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - б) Сколько лучей есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - в) Сколько отрезков есть на вашем рисунке? Назовите их.
 - г) Что является пересечением отрезков CA и DF ?
 - д) Что является объединением лучей FC и AD ?
2. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите цветным карандашом прямую AB_1 , луч CD_1 .
3. Изобразите шесть точек так, чтобы не менее пяти из них лежали на одной прямой. Через каждые две точки можно провести одну прямую. Сколько всего различных прямых можно провести через эти шесть точек? А если взять n точек так, чтобы не менее чем $(n - 1)$ точек лежали на одной прямой?

Самостоятельная работа № 2 (к пп. 1.3, 1.4). Длина отрезка

Вариант 1

1. Начертите луч с началом в точке A . Отложите на нём один вслед за другим отрезки $AC = CD = DE$ и отрезок EM , больший отрезка DE . Назовите отрезок, равный:
 - а) сумме отрезков AC и CE ;
 - б) сумме отрезков AC и EM ;
 - в) разности отрезков AD и AC ;
 - г) разности отрезков DM и AC ;
 - д) произведению числа 2 и отрезка DE ;
 - е) произведению числа $\frac{1}{3}$ и отрезка AE .
2. Изобразите отрезки a и b такие, что $a > b$. Изобразите отрезки, равные: $2a$; $3b$; $2a - b$.
3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведён отрезок $B_1 D$ (диагональ куба) и взята точка M на ребре BC (рис. 1). Верно ли, что сумма отрезков $B_1 M$ и MD равна отрезку $B_1 D$?

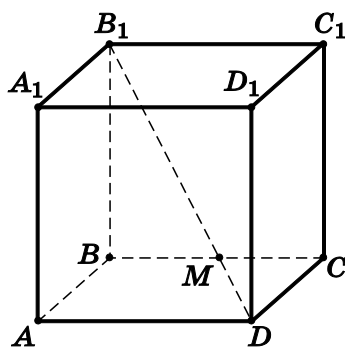


Рис. 1

Вариант 2

1. Начертите луч с началом в точке B . Отложите на нём один вслед за другим отрезки $BC = CA = AD$ и отрезок DM , меньший отрезка AD . Назовите отрезок, равный:
 - а) сумме отрезков BC и CD ;
 - б) сумме отрезков BC и DM ;
 - в) разности отрезков AB и AC ;

- г) разности отрезков AM и BC ;
 - д) произведению числа 2 и отрезка DA ;
 - е) произведению числа $\frac{1}{3}$ и отрезка BD .
2. Изобразите отрезки a и b такие, что $a < b$. Изобразите отрезки, равные: $3a$; $2b$; $2b - a$.
 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведён отрезок $A_1 C$ (диагональ куба) и взята точка N на ребре BB_1 (рис. 2). Верно ли, что сумма отрезков $A_1 N$ и NC равна отрезку $A_1 C$?

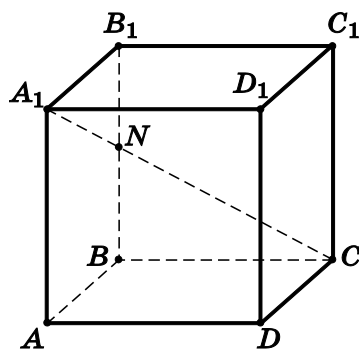


Рис. 2

Вариант 3

1. Начертите луч с началом в точке K . Отложите на нём один вслед за другим отрезки $KC = CP = PE$ и отрезок EF , больший отрезка PE . Назовите отрезок, равный:
 - а) сумме отрезков KC и CE ;
 - б) сумме отрезков KC и EF ;
 - в) разности отрезков KP и PE ;
 - г) разности отрезков PF и KC ;
 - д) произведению числа 2 и отрезка CP ;
 - е) произведению числа $\frac{1}{3}$ и отрезка EK .
2. Изобразите отрезки a и b такие, что $a > b$. Изобразите отрезки, равные: $4a$; $3b$; $3a - 2b$.
3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки $M \in A_1 B_1$, $H \in BB_1$, $G \in BC$, $E \in CD$. Точки M , H , G и E последовательно соединены отрезками (рис. 3).

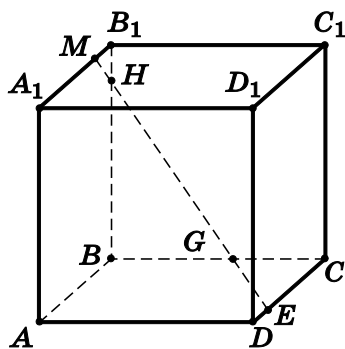


Рис. 3

Определите вид получившейся линии. Верно ли, что сумма отрезков MH , HG , GE равна отрезку ME ? Если нет, то, как вам кажется, эта сумма меньше или больше отрезка ME ?

Вариант 4

- Начертите луч с началом в точке B . Отложите на нём один вслед за другим отрезки $BC = CA = AD$ и отрезок DM , меньший отрезка AD . Назовите отрезок, равный:
 - сумме отрезков BC и CD ;
 - сумме отрезков BC и DM ;
 - разности отрезков AB и AC ;
 - разности отрезков AM и BC ;
 - произведению числа 2 и отрезка DA ;
 - произведению числа $\frac{1}{3}$ и отрезка BD .
- Изобразите отрезки a и b такие, что $a < b$. Изобразите отрезки, равные: $3a$; $2b$; $2b - a$.
- В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки $M \in A_1 B_1$, $N \in B_1 D_1$, $K \in BC$, $P \in CD$ (рис. 4).

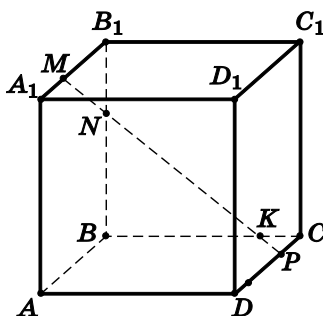


Рис. 4

Точки M , N , K и P последовательно соединены отрезками. Определите вид получившейся линии. Верно ли, что сумма отрезков MN , NK , KP равна отрезку MP ? Если нет, то, как вам кажется, эта сумма меньше или больше отрезка MP ?

Самостоятельная работа № 3 (к п. 1.5).

Длина отрезка

Вариант 1

1. Перечертите по клеткам линию, состоящую из отрезков AB , BC , CD и DE (рис. 5).

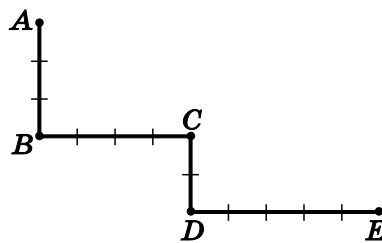


Рис. 5

- а) Измерьте каждый из отрезков и запишите их длины в сантиметрах.
 - б) Какова длина всей линии?
 - в) Измерьте расстояние между точками B и D , A и E .
2. Перерисуйте по клеткам треугольник ABC (рис. 6). Измерьте его стороны. Найдите периметр. Измерьте длину отрезка, соединяющего вершину B с серединой стороны AC .

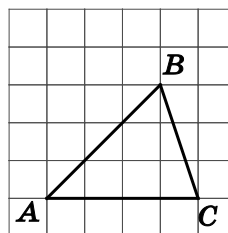


Рис. 6

3. Нарисуйте прямоугольник со сторонами 2,5 см и 3 см. Найдите его периметр. Измерьте и запишите расстояния между серединами каждой двух его соседних сторон.

4. Пусть отрезки $AB = 2$ см, $BC = 3$ см. Означает ли это, что длина отрезка $AC = 5$ см? Поясните свой ответ рисунком.
5. На изображении пирамиды (рис. 7) проведите цветным карандашом линию, состоящую из отрезков MP , PN , NK , KB . Видимые отрезки отметьте сплошной линией, а невидимые — штриховой.

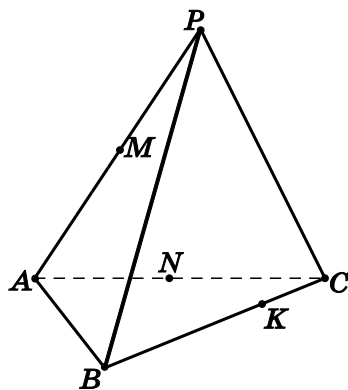


Рис. 7

Вариант 2

1. Перечертите по клеткам линию, состоящую из отрезков AB , BC , CD и DE (рис. 8).

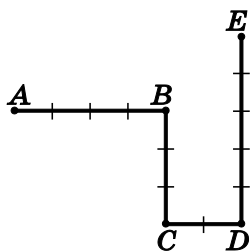


Рис. 8

- а) Измерьте каждый из отрезков и запишите их длины в сантиметрах.
 - б) Какова длина всей линии?
 - в) Измерьте расстояние между точками: B и D , A и E .
2. Перерисуйте по клеткам треугольник ABC (рис. 9). Измерьте его стороны. Найдите периметр. Измерьте длину отрезка, соединяющего вершину C с серединой стороны AB .

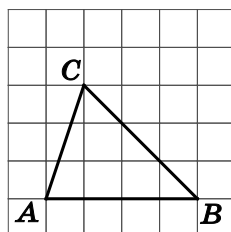


Рис. 9

3. Нарисуйте прямоугольник со сторонами 2 см и 3,5 см. Найдите его периметр. Измерьте и запишите расстояния между серединами каждой двух его соседних сторон.
4. Пусть отрезки $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Означает ли это, что длина отрезка $AC = 7$ см? Поясните свой ответ рисунком.
5. На изображении пирамиды (рис. 10) проведите цветным карандашом линию, состоящую из отрезков MP , PN , NK , KB . Видимые отрезки отметьте сплошной линией, а невидимые — штриховой.

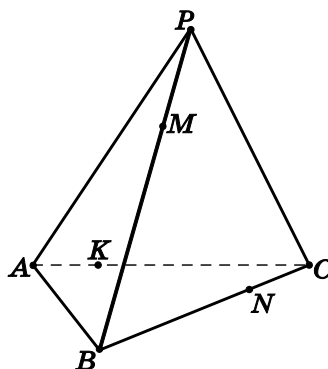


Рис. 10

Вариант 3

1. Перечертите по клеткам линию, состоящую из отрезков AB , BC , CD , DE , EF , FG (рис. 11).

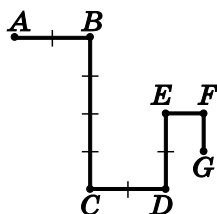


Рис. 11

- а) Измерьте каждый из отрезков и запишите их длины в сантиметрах/
 - б) Какова длина всей линии?
 - в) Измерьте расстояние между точками B и D , A и E .
2. Перерисуйте по клеткам треугольник ABC (рис. 12).

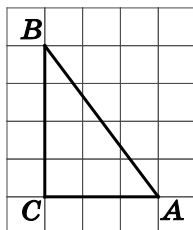


Рис. 12

- Измерьте его стороны; найдите периметр. Найдите середину стороны AC . Измерьте длину отрезка, соединяющего вершину B с серединой стороны AC . Во сколько раз длина этого отрезка отличается от длины отрезка AB ?
3. Нарисуйте прямоугольник со сторонами 5 см и 12 см. Найдите его периметр. Измерьте и запишите расстояния между серединами каждой двух его соседних сторон. Измерьте диагональ этого прямоугольника. Во сколько раз сумма расстояний между серединами сторон больше длины диагонали?
4. Пусть отрезки $AB = 2$ см, $BC = 3$ см. Возможно ли такое расположение точек A , B и C , что:
- а) $AC = 4$ см; б) $AC = 5$ см; в) $AC = 6$ см?
- Ответы проиллюстрируйте рисунками.
5. На изображении пирамиды (рис. 13) проведите цветным карандашом линию, состоящую из отрезков AM , MK , KE , EP , PH , HC , CA . Видимые отрезки отметьте сплошной линией, а невидимые — штриховой. Является ли эта линия плоской или пространственной? Какими ещё свойствами она обладает?

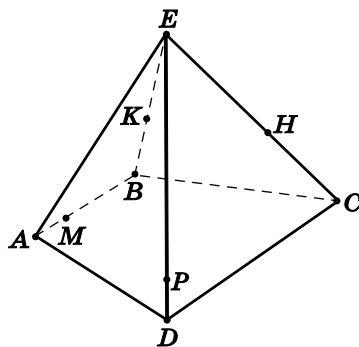


Рис. 13

Вариант 4

1. Перечертите по клеткам линию, состоящую из отрезков AB , BC , CD , DE , EF , FG , GH , HK (рис. 14).

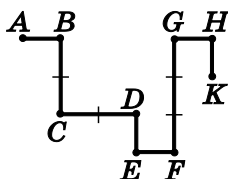


Рис. 14

- а) Измерьте каждый из отрезков и запишите их длины в сантиметрах.
 б) Какова длина всей линии?
 в) Измерьте расстояние между точками: B и K , A и E .
2. Перерисуйте по клеткам треугольник ABC (рис. 15).

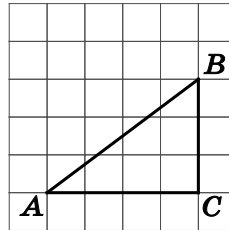


Рис. 15

- Измерьте его стороны. Найдите периметр. Найдите середину стороны AC . Измерьте длину отрезка, соединяющего вершину B с серединой стороны AC . Во сколько раз длина этого отрезка отличается от длины отрезка AB ?
3. Нарисуйте прямоугольник со сторонами 6 см и 2,5 см. Найдите его периметр. Измерьте и запишите расстояния между серединами каждой двух его соседних сторон. Измерьте диагональ этого прямоугольника. Во сколько раз сумма расстояний между серединами сторон больше длины диагонали?
4. Пусть отрезки $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Возможно ли такое расположение точек A , B и C , что:
- а) $AC = 6$ см; б) $AC = 7$ см; в) $AC = 8$ см?
- Ответы проиллюстрируйте рисунками.
5. На изображении пирамиды (рис. 16) проведите цветным карандашом линию, состоящую из отрезков MP , PH , HK , KB . Видимые отрезки отметьте сплошной линией, а невидимые — штриховой.

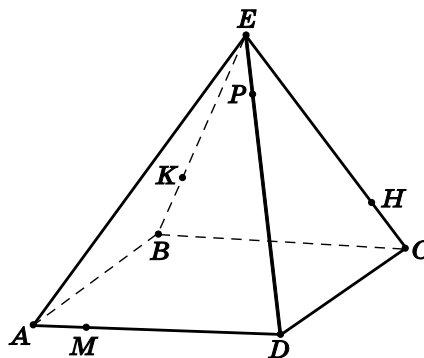


Рис. 16

Самостоятельная работа № 4 (к п. 1.5).

Длина отрезка

Вариант 1

1. Начертите два отрезка длинами $a = 3,8$ см и $b = 24$ мм. Какой из отрезков длиннее: $2a - b$ или $2b - a$?
2. На луче с началом в точке A отложите последовательно пять отрезков: $AB = BC = CD = DE = EM$. Запишите:
 - а) отрезок, который в три раза больше отрезка DE ;
 - б) отрезки, для которых точка C является серединой;
 - в) отрезок, в 1,5 раза меньший отрезка BE ;
 - г) отрезок, составляющий $\frac{3}{4}$ отрезка BM ;
 - д) отрезки, отношение которых равно отношению чисел 2 и 3.

Вариант 2

1. Начертите два отрезка длинами $a = 42$ мм и $b = 3,8$ см. Какой из отрезков длиннее: $b - \frac{1}{2}a$ или $a - \frac{1}{2}b$?
2. На луче с началом в точке A отложите последовательно пять отрезков: $AB = BC = CD = DE = EM$. Запишите:
 - а) отрезок, который в 2,5 раза меньше отрезка AM ;
 - б) отрезки, для которых точка E является серединой;
 - в) отрезок, в два раза больший отрезка BD ;
 - г) отрезок, составляющий $\frac{2}{5}$ отрезка AM ;
 - д) отрезки, отношение которых равно отношению чисел 3 и 4.

Вариант 3

1. Начертите три отрезка длинами $a = 42$ мм, $b = 3,8$ см, $c = 0,4$ дм. Какой из отрезков длиннее: $3b + 2a - c$ или $4c - b + a$?
2. На луче с началом в точке A отложите последовательно шесть отрезков: $AB = BC = CD = DE = EM = MK$. Запишите:

- а) отрезок, который в 1,5 раза меньше отрезка AK ;
- б) отрезки, которые точка C делит в отношении 1 к 2;
- в) отрезок, в два раза больший отрезка BE ;
- г) отрезок, составляющий $1\frac{1}{3}$ отрезка DK ;
- д) отрезки, отношение которых равно отношению чисел 2 и 5.

Вариант 4

- Начертите три отрезка длинами $a = 0,5$ дм, $b = 47$ мм, $c = 5,2$ см. Какой из отрезков длиннее: $4b - 2a + c$ или $3c - b + a$?
- На луче с началом в точке P отложите последовательно девять отрезков $PK = KL = LN = NM = MA = AC = CH = HB = BQ$. Запишите:
 - а) отрезок, который в 1,5 раза меньше отрезка PC ;
 - б) отрезки, которые точка N делит в отношении 1 к 3;
 - в) отрезок, который в три раза меньше отрезка KH ;
 - г) отрезок, составляющий $1\frac{1}{3}$ отрезка LA ;
 - д) отрезки, отношение которых равно отношению чисел 3 и 7.

Самостоятельная работа № 5 (к п. 1.6).

Понятие о равенстве двух фигур. Равенство треугольников

Вариант 1

- На каком рисунке (17, а или 17, б) есть равные треугольники? Объясните.

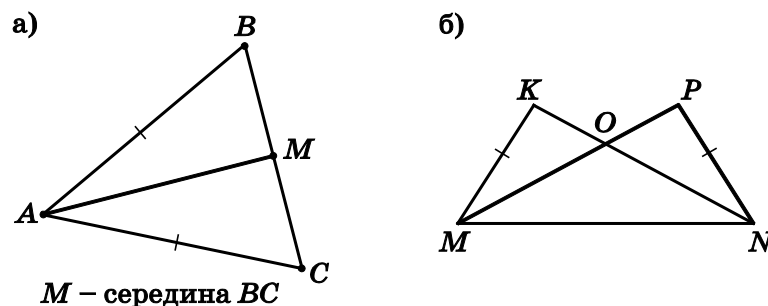


Рис. 17

- Назовите равные грани тетраэдра $PADE$ (рис. 18).

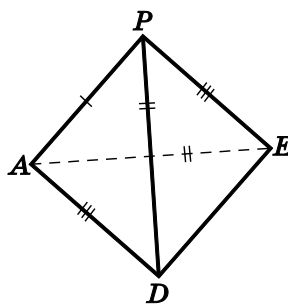


Рис. 18

Вариант 2

1. На каком рисунке (19, а или 19, б) есть равные треугольники? Объясните.

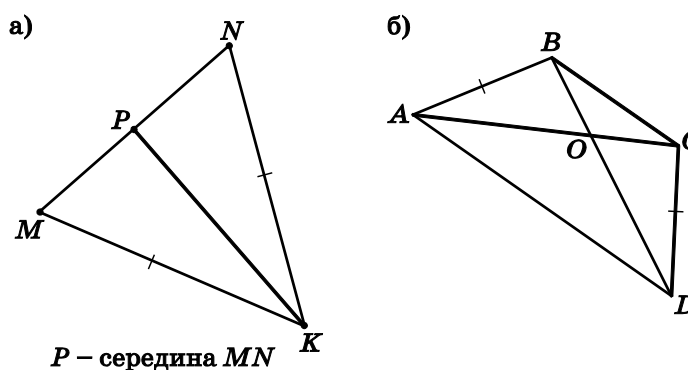


Рис. 19

2. Назовите равные грани тетраэдра $PADE$ (рис. 20).

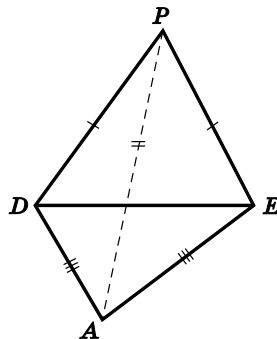


Рис. 20

Вариант 3

1. На каком рисунке (21, а или 21, б) есть равные треугольники? Объясните.

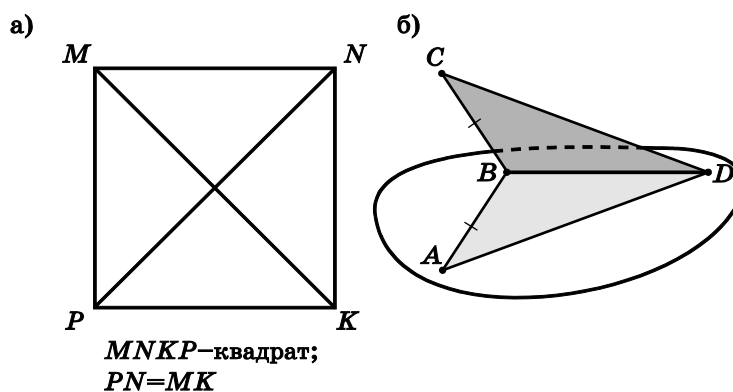


Рис. 21

2. Назовите равные треугольники, лежащие в гранях куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 22). Диагонали граней куба (AB_1 и CB_1) равны.

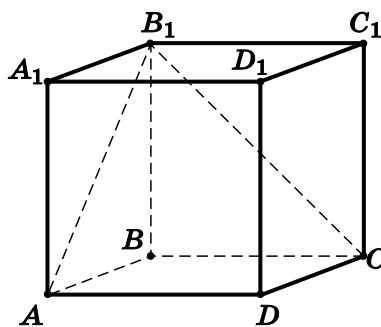


Рис. 22

Вариант 4

1. На каком рисунке (23, а или 23, б) есть равные треугольники? Объясните.

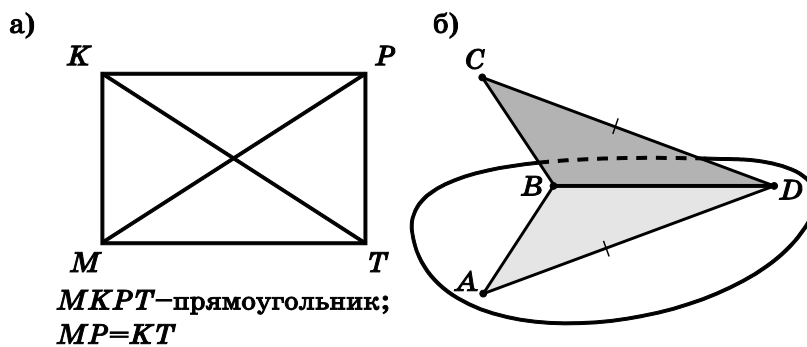


Рис. 23

2. Назовите равные треугольники, лежащие в гранях куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 24). Диагонали граней куба (BC_1 и DC_1) равны.

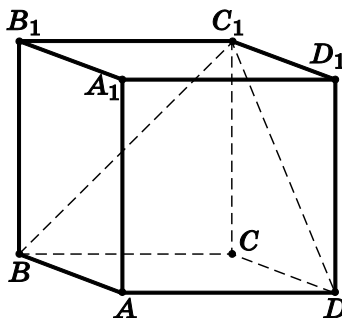


Рис. 24

Самостоятельная работа № 6 (к пп. 2.1, 2.2).

Окружность и круг

Вариант 1

1. Нарисуйте окружность радиусом 3,5 см. Нарисуйте вторую окружность, concentricкую с данной, радиус которой составляет 0,8 от радиуса первой. Закрасьте полученное кольцо. Вычислите его ширину.
2. Нарисуйте две пересекающиеся окружности, радиус одной из которых 3,5 см, а другой на 0,8 см меньше. Изобразите на рисунке:
 - а) радиус первой окружности;
 - б) диаметр второй окружности;
 - в) хорду первой окружности, не являющуюся хордой второй;
 - г) сектор первого круга;
 - д) сегмент второго круга.
3. Используя рисунок 25, получите два равных треугольника ($AB = CD$).

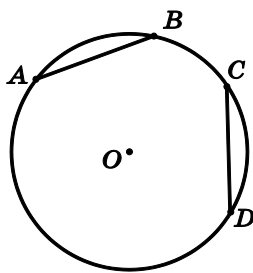


Рис. 25

Вариант 2

1. Нарисуйте окружность радиусом 2,4 см. Нарисуйте вторую окружность, concentricкую с данной, радиус которой в 1,5 раза больше радиуса первой. Закрасьте полученное кольцо. Вычислите его ширину.
2. Нарисуйте две пересекающиеся окружности, радиус одной из которых 2,4 см, а другой на 1,5 см больше. Изобразите на рисунке:
 - а) радиус первой окружности;
 - б) диаметр второй окружности;
 - в) хорду первой окружности, не являющуюся хордой второй;
 - г) сектор первого круга;
 - д) сегмент второго круга.
3. Используя рисунок 26, получите два равных треугольника (точка M — середина хорды CA).

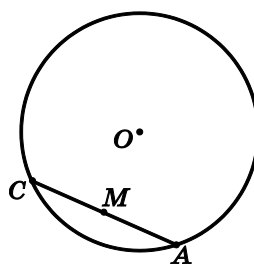


Рис. 26

Вариант 3

1. Нарисуйте окружность радиусом 3,3 см. Нарисуйте вторую окружность, концентрическую с данной, радиус которой составляет $\frac{1}{3}$ радиуса первой. Закрасьте полученное кольцо. Вычислите его ширину. Можно ли сделать это, не находя радиуса меньшей окружности?
2. Нарисуйте две пересекающиеся окружности, радиус одной из которых 2,4 см, а другой на 1,5 см больше, так, чтобы центр каждой окружности лежал вне другой. Последовательно выполните построения. Изобразите на рисунке:
 - а) отрезок, соединяющий центры этих окружностей;
 - б) точки (на нарисованном в пункте а) отрезке), не принадлежащие пересечению кругов;
 - в) хорду большей окружности, не являющуюся диаметром и не имеющую общих точек с меньшей окружностью, получив два сегмента; при этом дуга меньшей окружности должна принадлежать большему сегменту, очерченному большей окружностью;
 - г) в меньшей окружности радиусы в точках пересечения с большей окружностью, получив секторы;
 - д) точки, принадлежащие либо меньшему сектору меньшего круга, либо большему сегменту большего круга, но не их пересечению.
3. Используя рисунок 27, получите два равных треугольника ($AB = CD$).

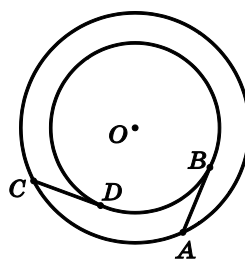


Рис. 27

Вариант 4

1. Нарисуйте окружность радиусом 3,5 см. Нарисуйте вторую окружность, concentricкую с данной, радиус которой составляет $\frac{3}{7}$ радиуса первой. Закрасьте полученное кольцо. Вычислите его ширину. Можно ли сделать это, не находя радиуса меньшей окружности?
2. Нарисуйте две пересекающиеся окружности, радиус одной из которых 3,6 см, а другой на 1,2 см меньше, так, чтобы центр каждой окружности лежал вне другой. Последовательно выполните построения. Изобразите на рисунке:
 - а) отрезок, соединяющий центры этих окружностей;
 - б) точки на нарисованном отрезке, не принадлежащие пересечению кругов;
 - в) хорду меньшей окружности, не являющуюся диаметром и не имеющую общих точек с большей окружностью, получив два сегмента; при этом дуга большей окружности должна проходить через больший сегмент;
 - г) в большей окружности радиусы в точках пересечения с меньшей окружностью, получив секторы;
 - д) точки, принадлежащие либо меньшему сектору большого круга, либо большему сегменту меньшего круга, но не их пересечению.
3. Используя рисунок 28, получите два равных треугольника ($AB = CD$).

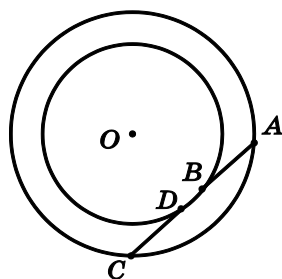


Рис. 28

Самостоятельная работа № 7 (к п. 2.3).

Центральная симметрия

Вариант 1

1. Посмотрите на рисунок 29.

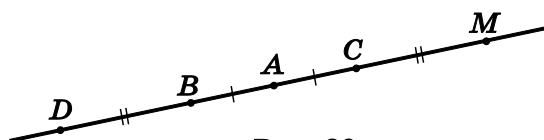


Рис. 29

- Напишите, какая точка симметрична точке C относительно точки A .
 - Напишите, какая точка симметрична точке D относительно точки A .
 - Верно ли, что точка A симметрична точке M относительно точки C ?
Ответ обоснуйте.
 - Напишите, какой отрезок симметричен отрезку CM относительно точки A .
 - Какая точка является центром симметрии отрезка AD ?
2. Нарисуйте круг с центром в точке O и радиусом 3,2 см. Проведите в нём хорду AB , не являющуюся диаметром. Проведите хорду CD , симметричную AB относительно центра окружности. Закрасьте меньший сегмент с хордой AB и сегмент, симметричный ему относительно точки O .

Вариант 2

1. Посмотрите на рисунок 30.

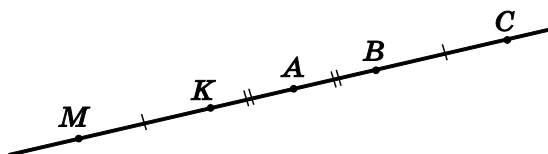


Рис. 30

- Напишите, какая точка симметрична точке B относительно точки A .

- б) Напишите, какая точка симметрична точке C относительно точки A .
- в) Верно ли, что точка A симметрична точке D относительно точки M ?
Ответ обоснуйте.
- г) Напишите, какой отрезок симметричен отрезку MK относительно точки A .
- д) Какая точка является центром симметрии отрезка AC ?
2. Нарисуйте круг с центром в точке O и радиусом 4,1 см. Проведите в нём хорду PK , не являющуюся диаметром. Проведите хорду MT , симметричную PK относительно центра окружности. Закрасьте меньший сегмент с хордой MT и сегмент, симметричный ему относительно точки O .

Вариант 3

1. На рисунке 31 $AO = OD$; $BO = OE = EH$; $CO = OF$; $OP = PT$.

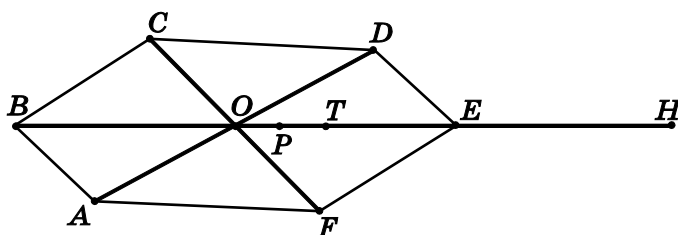


Рис. 31

- а) Напишите, какой отрезок симметричен отрезку BC относительно точки O .
- б) Напишите, какой отрезок симметричен отрезку AO относительно точки O .
- в) Напишите, какой отрезок симметричен отрезку CF относительно точки O .
- г) Для какого отрезка точка P является центром симметрии?
- д) Возможно ли, что точки H и B симметричны относительно точки T ?
Если да, то при каком условии?
- е) Какой треугольник симметричен треугольнику ODE относительно точки O ?
2. Нарисуйте круг с центром в точке O и радиусом 5 см. Проведите в нём хорду MT , не являющуюся диаметром. Проведите хорду AK ,

симметричную MT относительно центра окружности. Закрасьте меньший сегмент с хордой AK и сегмент, симметричный ему относительно точки O .

3. Перерисуйте изображение куба и ломаной, проходящей по его рёбрам (рис. 32). Нарисуйте другим цветом ломаную, симметричную данной относительно точки пересечения диагоналей куба. (Диагонали куба делятся точкой пересечения пополам.)

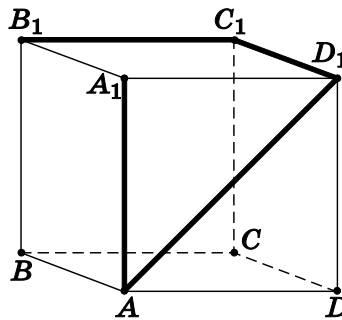


Рис. 32

Вариант 4

1. На рисунке 33 $AO = OD$; $BO = OE = EH$; $CO = OF$; $OP = PT$.

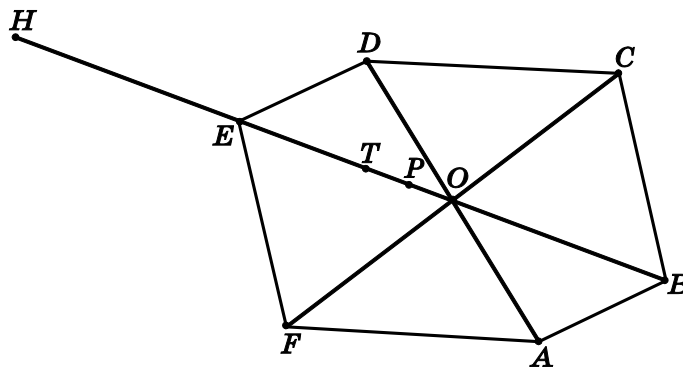


Рис. 33

- Напишите, какой отрезок симметричен отрезку BC относительно точки O .
- Напишите, какой отрезок симметричен отрезку AO относительно точки O .
- Напишите, какой отрезок симметричен отрезку CF относительно точки O .
- Для какого отрезка точка P является центром симметрии?
- Возможно ли, что точки H и B симметричны относительно точки T ? Если да, то при каком условии?

- е) Какой треугольник симметричен треугольнику ODE относительно точки O ?
- Нарисуйте круг с центром в точке O и радиусом 5 см. Проведите в нём хорду MT , не являющуюся диаметром. Проведите хорду AK , симметричную MT относительно центра окружности. Закрасьте меньший сегмент с хордой AK и сегмент, симметричный ему относительно точки O .
 - Перерисуйте изображение куба и ломаной, проходящей по его рёбрам (рис. 34). Нарисуйте другим цветом ломаную, симметричную данной относительно точки пересечения диагоналей куба. (Диагонали куба делятся точкой пересечения пополам.)

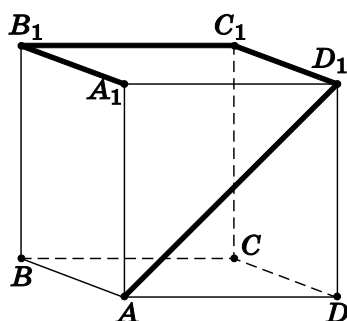


Рис. 34

Самостоятельная работа № 8 (к п. 2.4).

Построения циркулем и линейкой

Вариант 1

- Постройте треугольник ABC и луч AB . На луче AB отложите с помощью циркуля отрезок $AD = BC$. Изобразите прямую CD .
- Постройте треугольник MNK . Теперь построьте треугольник ABC , равный треугольнику MNK , так, чтобы $AB = MK$.
- Постройте окружность с центром O . Возьмите на ней точку M и построьте окружность с центром M таким же радиусом.

Вариант 2

- Постройте треугольник PQD и луч QD . На луче QD отложите с помощью циркуля отрезок $QM = DQ$. Изобразите прямую PM .

2. Постройте треугольник ABC . Теперь постройте треугольник MNK , равный треугольнику ABC , так, чтобы $AC = MN$.
3. Постройте окружность с центром O . Возьмите на ней точку M и построьте окружность с центром M таким же радиусом.

Вариант 3

1. Постройте треугольник PQD и прямую QD . На прямой QD отложите с помощью циркуля отрезки QM и QS , равные PQ . Что является пересечением этих отрезков? Какова длина их объединения, если $PQ = 5$ ед.? Запишите, через какие точки пройдёт окружность с центром Q и радиусом равным QS .
2. Постройте треугольник ABC . Проведите прямую BC и в полуплоскости, в которой не лежит точка A , построьте треугольник BMC так, что $BM = AC$ и $MC = AB$. Что можно сказать про треугольники ABM и MCA ? Объясните свой вывод.
3. Постройте окружность с центром O . Возьмите на ней точку M и построьте окружность с центром M таким же радиусом. Пусть радиус исходной окружности равен 2 ед. Какой наибольшей длины может быть отрезок, концы которого лежат на объединении окружностей? Пусть точки пересечения окружностей A и B . Найдите периметр четырёхугольника $OAMB$.

Вариант 4

1. Постройте треугольник MPK и прямую PK . На прямой PK отложите с помощью циркуля отрезки PA и PS , равные MP . Что является пересечением этих отрезков? Какова длина их объединения, если $PM = 3$ ед.? Запишите, через какие точки пройдёт окружность с центром P и радиусом, равным PA ?
2. Постройте треугольник DEN . Проведите прямую DN и в полуплоскости, в которой не лежит точка E , построьте треугольник DKN так, что $DK = EN$ и $KN = DE$. Что можно сказать про треугольники EDK и KNE ? Объясните свой вывод.

3. Постройте окружность с центром O . Возьмите на ней точку M и постройте окружность с центром M таким же радиусом. Пусть радиус исходной окружности равен 4 ед. Какой наибольшей длины может быть отрезок, концы которого лежат на объединении окружностей? Пусть точки пересечения окружностей A и B . Найдите периметр четырёхугольника $OAMB$.

Самостоятельная работа № 9 (к п. 3.1).

Угол, смежные углы

Вариант 1

- Начертите неразвёрнутый выпуклый угол с вершиной O . Изобразите две точки: точку A на стороне угла и точку B внутри угла.
 - Изобразите хорду угла, содержащую точки A и B , назовите её.
 - Изобразите луч OB и продолжение его за точку O . На продолжении возьмите точку P . Глядя на рисунок, запишите развёрнутый угол и пару смежных углов.
- Изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 35). Запишите какой-нибудь угол с вершиной C_1 , стороны которого содержат вершины куба, и постройте на рисунке смежный с ним угол.

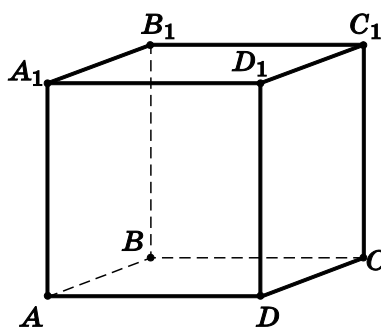


Рис. 35

3. а) Сколько всего различных углов изображено на рисунке 36? Запишите их названия.

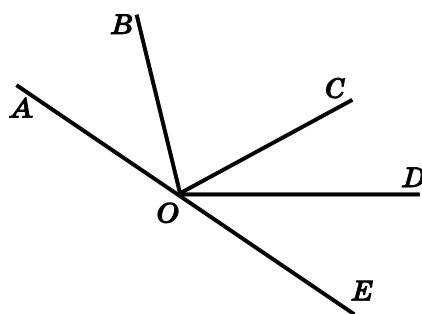


Рис. 36

б) Являются ли смежными следующие пары углов:

$\angle AOB$ и $\angle BOD$; $\angle DOE$ и $\angle AOB$; $\angle DOE$ и $\angle DOA$?

Вариант 2

1. Начертите неразвёрнутый выпуклый угол с вершиной K . Изобразите две точки: точку M на стороне угла и точку P внутри угла.
 - а) Изобразите хорду угла, содержащую точки M и P , назовите её.
 - б) Изобразите луч KP и продолжение его за точку K . На продолжении возьмите точку D . Глядя на рисунок, запишите развёрнутый угол и пару смежных углов.
2. Изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 37). Запишите какой-нибудь угол с вершиной A_1 , стороны которого содержат вершины куба, и постройте на рисунке смежный с ним угол.

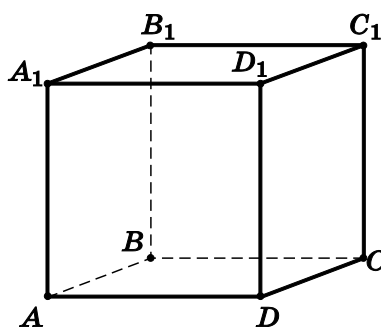


Рис. 37

3. а) Сколько всего различных углов изображено на рисунке 38? Запишите их названия.

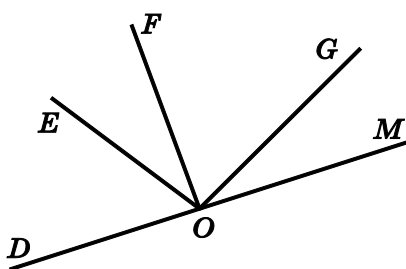


Рис. 38

б) Являются ли смежными следующие пары углов:

$\angle MOG$ и $\angle FOD$; $\angle DOE$ и $\angle EOM$; $\angle DOE$ и $\angle EOG$?

Вариант 3

1. Начертите неразвёрнутый выпуклый угол с вершиной T .

а) Изобразите точки M и A внутри угла таким образом, чтобы через них проходила некоторая хорда угла T . Изобразите эту хорду и назовите её.

б) Отметьте внутри угла точку B так, чтобы невозможно было провести хорду угла T через точки A и B одновременно. Цветным карандашом отметьте, где располагаются все точки, обладающие таким свойством.

в) Изобразите луч TM и продолжение его за точку T . На продолжении возьмите точку P . Глядя на рисунок, запишите развёрнутый угол и пары смежных углов.

2. Изобразите тетраэдр $SABC$. Запишите какой-нибудь угол с вершиной S , стороны которого содержат вершины тетраэдра, и постройте на рисунке смежный с ним угол.

3. Сколько всего выпуклых углов со стороной OD изображено на рисунке 39? По рисунку найдите, какие углы являются смежными для углов: $\angle COD$, $\angle FOB$, $\angle COF$. Являются ли смежными углами: $\angle AOB$ и $\angle BOC$; $\angle FOE$ и $\angle FOB$; $\angle DOE$ и $\angle BOA$?

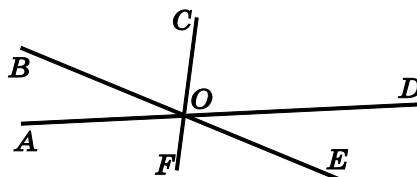


Рис. 39

Вариант 4

1. Начертите неразвёрнутый выпуклый угол с вершиной B .

- а) Изобразите точки P и K внутри угла таким образом, чтобы через них проходила некоторая хорда угла B . Изобразите эту хорду и назовите её.
- б) Отметьте внутри угла точку N так, чтобы невозможно было провести хорду угла B через точки K и N одновременно. Цветным карандашом отметьте, где располагаются все точки, обладающие таким свойством.
- в) Изобразите луч BP и продолжение его за точку B . На продолжении возьмите точку F . Глядя на рисунок, запишите развёрнутый угол и пары смежных углов.
2. Изобразите тетраэдр $DMKP$. Запишите какой-нибудь угол с вершиной D , стороны которого содержат вершины тетраэдра, и постройте на рисунке смежный с ним угол.
3. Сколько всего выпуклых углов со стороной AE изображено на рисунке 40? По рисунку найдите, какие углы являются смежными для углов: $\angle FAG$, $\angle HAP$, $\angle EAH$. Являются ли смежными углами: $\angle GAE$ и $\angle EAN$; $\angle FAH$ и $\angle HAN$; $\angle PAE$ и $\angle FAN$?

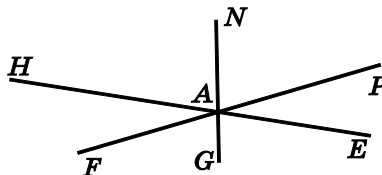


Рис. 40

Самостоятельная работа № 10 (к п. 3.2).

Равенство углов. Свойство равных углов

Вариант 1

1. На рисунке 41 $AB = CD$. Проведите четыре луча так, чтобы получилась пара равных углов. Докажите их равенство.

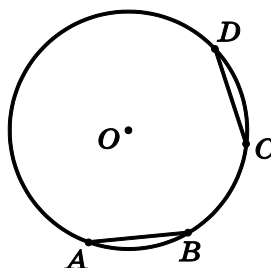


Рис. 41

2. На рисунке 42 углы K и N равны. Постройте соответственные хорды этих углов. Сравните полученные хорды.

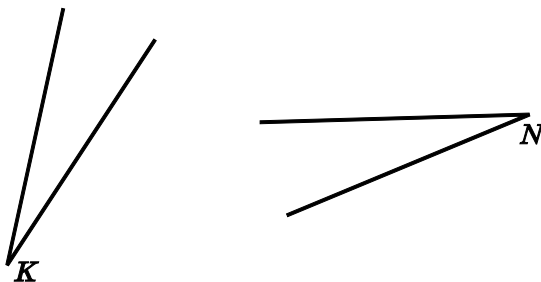


Рис. 42

3. На рисунке 43 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

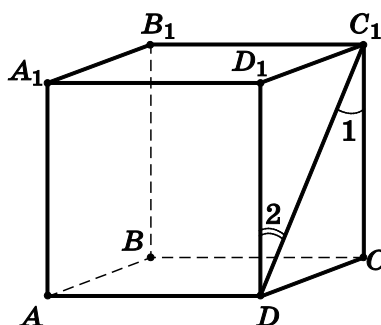


Рис. 43

Вариант 2

1. На рисунке 44 $AB = CD$. Проведите четыре луча так, чтобы получилась пара равных углов. Докажите их равенство.

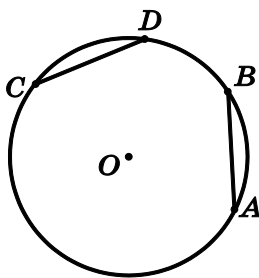


Рис. 44

2. На рисунке 45 углы P и Q равны. Постройте соответственные хорды этих углов. Сравните полученные хорды.

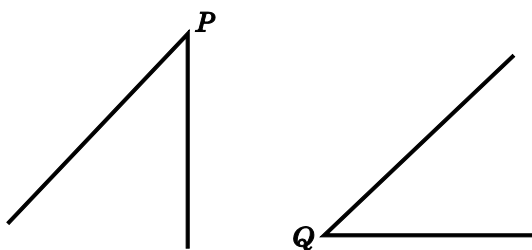


Рис. 45

3. На рисунке 46 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

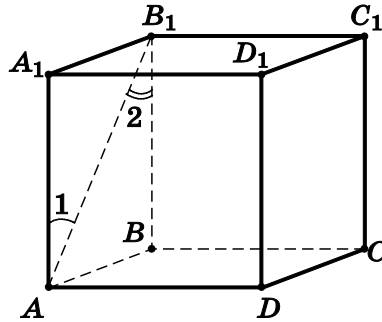


Рис. 46

Вариант 3

1. На рисунке 47 углы Q и N равны. Постройте соответственные хорды этих углов. Сравните полученные хорды.

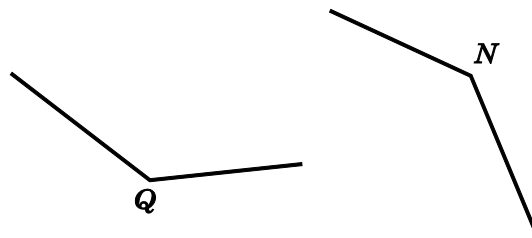


Рис. 47

2. На рисунке 48 $MP = KD$. Проведите четыре луча так, чтобы получилась пара равных углов. Докажите их равенство.

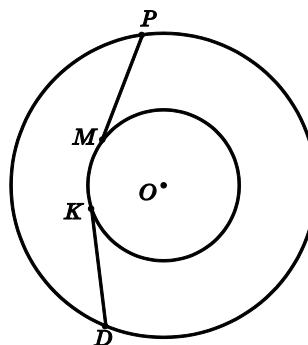


Рис. 48

3. Глядя на рисунок 49, докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

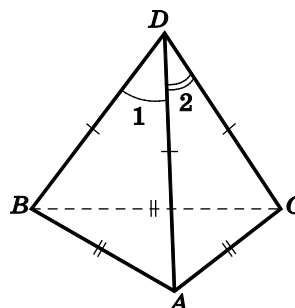


Рис. 49

Вариант 4

1. На рисунке 50 углы F и E равны. Постройте соответственные хорды этих углов. Сравните полученные хорды.

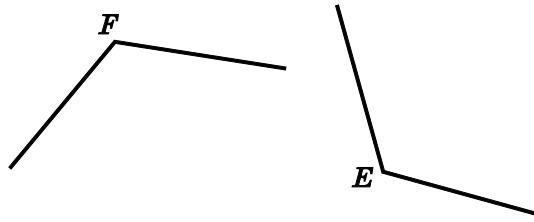


Рис. 50

2. На рисунке 51 $MP = KD$. Проведите четыре луча так, чтобы получилась пара равных углов. Докажите их равенство.

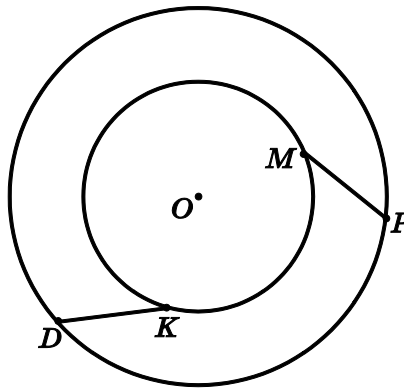


Рис. 51

3. Глядя на рисунок 52, докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

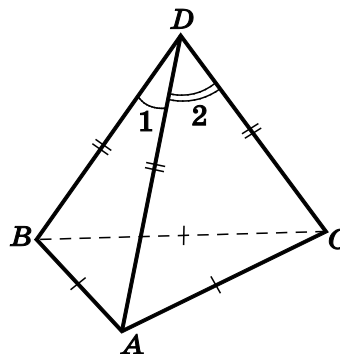


Рис. 52

Самостоятельная работа № 11 (к пп. 3.3, 3.4).

Откладывание угла. Сравнение углов. Прямой угол.

Биссектриса угла

Вариант 1

1. Нарисуйте треугольник ABC и прямую MN . На прямой возьмите точку P и отложите от луча PM угол, равный углу A треугольника ABC .
2. Нарисуйте угол AOB . Проведите луч OC так, чтобы угол AOC был меньше угла AOB , а луч OM так, чтобы угол AOM был больше угла AOB .
3. На рисунках 53 б и в проведите луч так, чтобы соответственно на одном образовался острый угол, а на другом — тупой. Закрасьте получившиеся на рисунках 53 а, б и в прямой, тупой и острый углы.

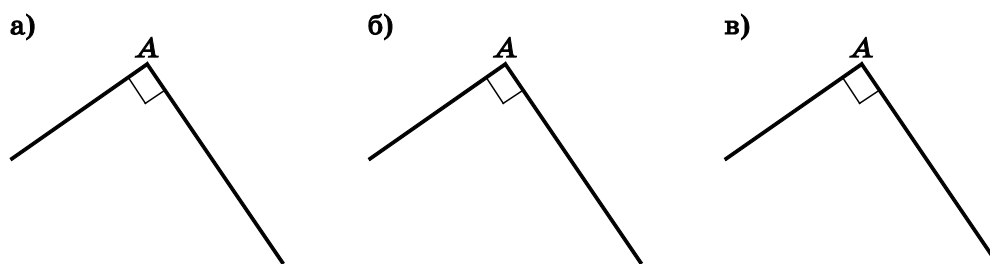


Рис. 53

4. Посмотрите на рисунок 54.

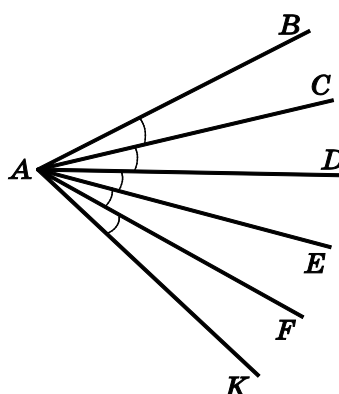


Рис. 54

- а) Запишите угол, для которого луч AF — биссектриса.
- б) Запишите все углы, для которых AE — биссектриса.
- в) Изобразите на глаз биссектрису угла KAD .

Вариант 2

1. Нарисуйте треугольник KFE и прямую AB . На прямой возьмите точку Q и отложите от луча QB угол, равный углу F треугольника KFE .
2. Нарисуйте угол MDE . Проведите луч DK так, чтобы угол MDK был меньше угла MDE , а луч DP так, чтобы угол MDP был больше угла MDE .

3. На рисунках 55, б и в проведите луч так, чтобы соответственно на одном образовался тупой угол, а на другом — острый. Закрасьте прямой, тупой и острый углы на рисунках 55, а, б и в.

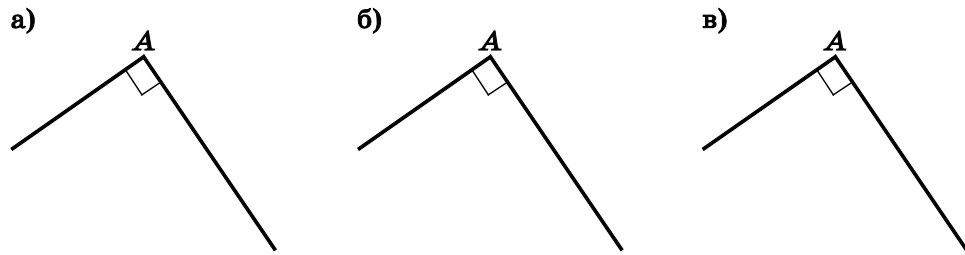


Рис. 55

4. Посмотрите на рисунок 56.

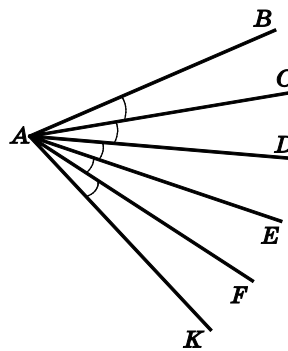


Рис. 56

- Запишите угол, для которого луч AC — биссектриса.
- Запишите все углы, для которых AD — биссектриса.
- Изобразите на глаз биссектрису угла CAF .

Вариант 3

- Нарисуйте треугольник MPD и прямую AB . На прямой возьмите точку F и на луче FA постройте угол AFG , равный половине угла D треугольника MPD .
- Нарисуйте угол ABC . Проведите луч BK так, чтобы угол ABK был меньше угла ABC , а луч BP так, чтобы угол ABP был больше угла ABC .
- Посмотрите на рисунок 57.

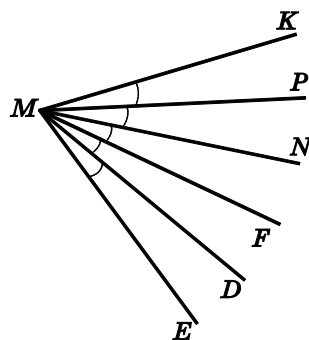


Рис. 57

- а) Запишите угол, для которого луч MD — биссектриса.
 - б) Запишите все углы, для которых MN — биссектриса.
 - в) Изобразите на глаз биссектрису угла PMD . Будет ли она являться биссектрисой ещё каких-то углов?
4. На рисунке 58 угол MLN прямой. Постройте в плоскости MLN луч LF так, чтобы угол MLF был острым, а луч LD так, чтобы угол MLD был тупым. Каким будет угол NLF ?

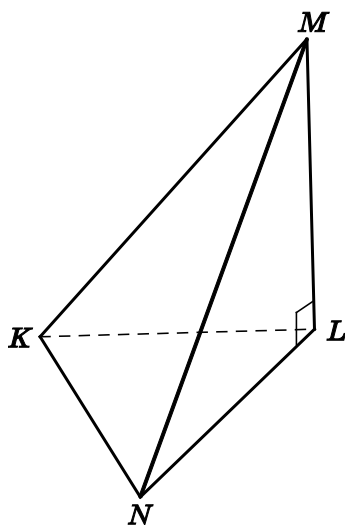


Рис. 58

Вариант 4

1. Нарисуйте треугольник QMS и прямую CA . На прямой возьмите точку E и на луче EC постройте угол CEG , равный половине угла M треугольника QMS .
2. Нарисуйте угол DCB . Проведите луч CK так, чтобы угол DCK был меньше угла DCB , а луч CP так, чтобы угол DCP был больше угла DCB .
3. Посмотрите на рисунок 59.

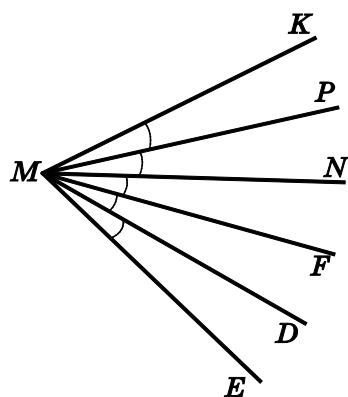


Рис. 59

- а) Запишите угол, для которого луч MP — биссектриса.
 - б) Запишите все углы, для которых MF — биссектриса.
 - в) Изобразите на глаз биссектрису угла DMP . Будет ли она являться биссектрисой ещё каких-то углов?
4. На рисунке 60 угол MLN прямой. Постройте в плоскости MLN луч LK так, чтобы угол NLK был острым, а луч LE так, чтобы угол NLE был тупым. Каким будет угол MLK ?

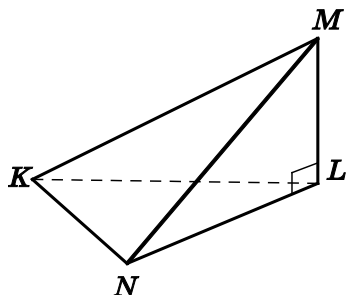


Рис. 60

Самостоятельная работа № 12 (к п. 3.5).

Биссектриса угла. Построение прямого угла

Вариант 1

- Изобразите острый, тупой и развёрнутый углы. Биссектрису острого угла постройте на глаз, а биссектрисы тупого и развёрнутого углов — при помощи циркуля и линейки. Запишите и отметьте на каждом рисунке равные углы.
- На рисунке 61 постройте угол DBM , если известно, что луч BC — его биссектриса.

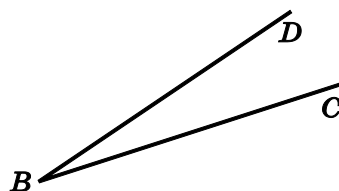


Рис. 61

3. На рисунке 62 а, б и в изобразите прямой угол BAC . На рисунке а изобразите прямой угол «на глаз»; на рисунке б — с помощью чертёжного угольника, на рисунке в — с помощью циркуля и линейки.

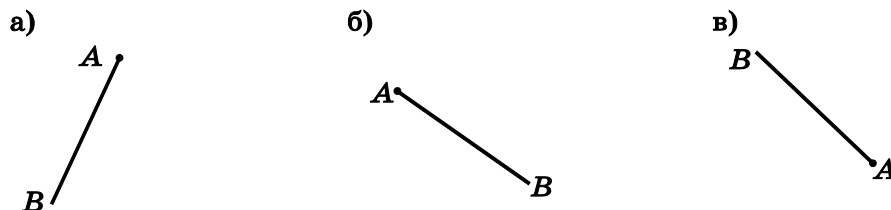


Рис. 62

Вариант 2

- Изобразите острый, тупой и развёрнутый углы. Биссектрису острого угла постройте на глаз, а биссектрисы тупого и развёрнутого углов — при помощи циркуля и линейки. Запишите и отметьте на каждом рисунке равные углы.
- На рисунке 63 постройте угол MPQ , если известно, что луч PF — его биссектриса.

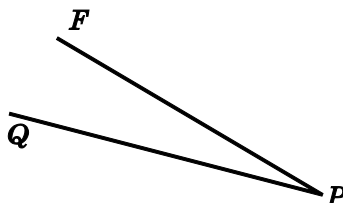


Рис. 63

3. На рисунке 64 а, б и в изобразите прямой угол BCA . На рисунке а изобразите прямой угол на глаз; на рисунке б — с помощью чертёжного угольника, на рисунке в — с помощью циркуля и линейки.

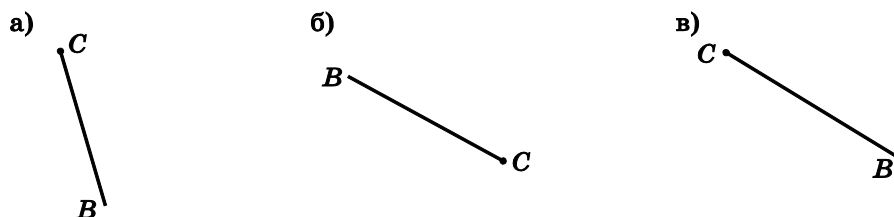


Рис. 64

Вариант 3

1. Постройте тупой угол. Проведите в нём биссектрису на глаз. Продлите одну из сторон тупого угла до прямой. Какой новый угол при этом получился — острый, прямой или тупой? Постройте биссектрису получившегося угла при помощи циркуля и линейки. Каким получился угол между биссектрисами?
2. Постройте произвольный острый угол BDE . Постройте угол CDE , если известно, что луч BD — его биссектриса.
3. Постройте луч (не по линиям клеток) и от него постройте прямой угол при помощи чертёжного угольника. Постройте второй луч и от него постройте прямой угол при помощи циркуля и линейки. Постройте третий луч и от него постройте прямой угол на глаз по линейке.

Вариант 4

1. Постройте острый угол. Проведите в нём биссектрису на глаз. Продлите одну из сторон острого угла до прямой. Какой новый угол при этом получился — острый, прямой или тупой? Постройте биссектрису получившегося угла при помощи циркуля и линейки. Каким получился угол между биссектрисами?
2. Постройте произвольный острый угол BDE . Постройте угол CDE , если известно, что луч BD — его биссектриса.
3. Постройте луч (не по линиям клеток) и от него постройте прямой угол при помощи циркуля и линейки. Постройте второй луч и от него постройте прямой угол при помощи чертёжного угольника. Постройте третий луч и от него постройте прямой угол на глаз по линейке.

Самостоятельная работа № 13 (к п. 3.6).

Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые

Вариант 1

1. Начертите две пересекающиеся прямые. Обозначьте номерами 1, 2, 3 и 4 четыре получившихся неразвёрнутых угла. Назовите все пары смежных и все пары вертикальных углов.
2. На рисунке 65 а изобразите угол, смежный с углом ABC , а на рисунке 65 б — угол, вертикальный углу ABC . Закрасьте дорисованный угол цветным карандашом.

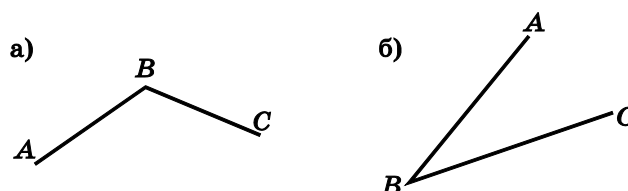


Рис. 65

3. Для выпуклого угла mn запишите смежный ему угол, а для выпуклого угла ac — вертикальный ему (рис. 66). Если подходящих углов несколько, запишите все.

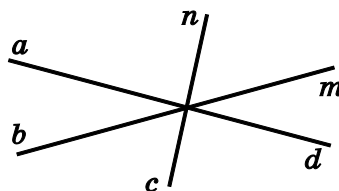


Рис. 66

4. На рисунке 67 изображён куб. Запишите прямые, перпендикулярные прямой DD_1 , на которых лежат рёбра куба.

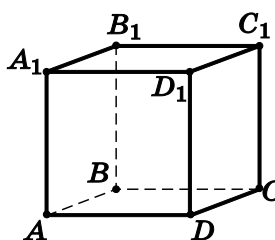


Рис. 67

5. Рассмотрите рисунки 68 а и б. Можно ли на изображении в каждом случае найти вертикальные углы?

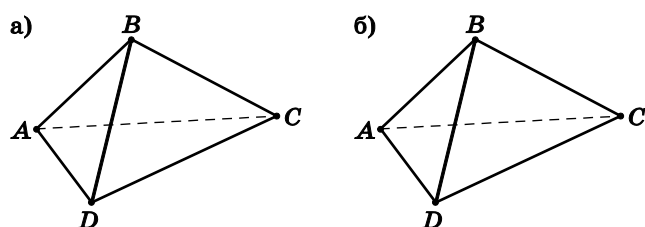


Рис. 68

Вариант 2

1. Начертите две пересекающиеся прямые. Обозначьте буквами α , β , γ и ϕ четыре получившихся неразвёрнутых угла. Запишите все пары смежных и все пары вертикальных углов.
2. На рисунке 69 а изобразите угол, вертикальный углу ABC , а на рисунке 69 б — угол, смежный с углом ABC . Закрасьте дорисованный угол цветным карандашом.

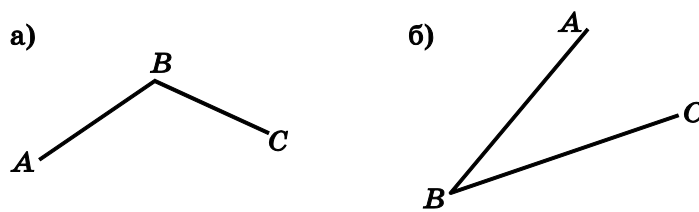


Рис. 69

3. Для выпуклого угла cd назовите смежный угол, а для выпуклого угла bn — вертикальный ему (рис. 70). Если подходящих углов несколько, назовите все.

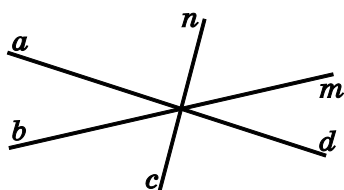


Рис. 70

4. На рисунке 71 изображён куб. Запишите прямые, перпендикулярные прямой CC_1 , на которых лежат рёбра куба.

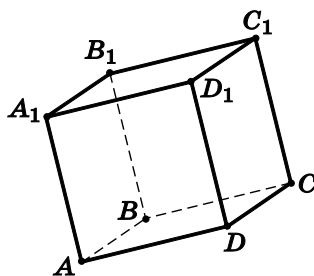


Рис. 71

5. Рассмотрите рисунок 72 а и б. Можно ли на изображении в каждом случае найти вертикальные углы?

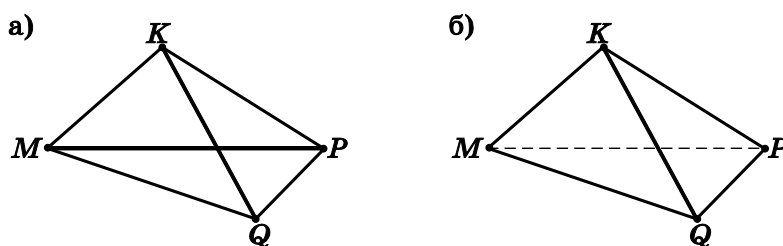


Рис. 72

Вариант 3

1. Начертите две пересекающиеся прямые. Обозначьте буквами α , β , γ и φ четыре получившихся неразвёрнутых угла. Запишите все пары смежных и все пары вертикальных углов.
2. На рисунке 73 а изобразите угол, вертикальный углу ABC , а на рисунке 73 б — угол, смежный с углом ABC . Закрасьте дорисованный угол цветным карандашом.

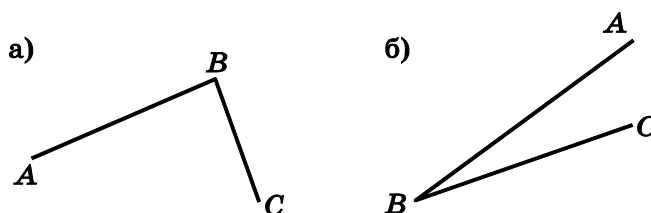


Рис. 73

3. На изображении пирамиды (рис. 75) постройте угол, вертикальный углу DAC , угол, смежный с углом DBA .

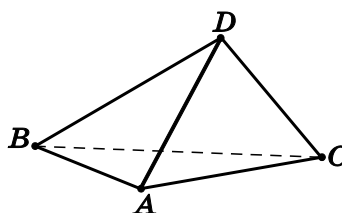


Рис. 75

4. Для выпуклого угла md запишите смежный угол, а для выпуклого угла db — вертикальный ему (рис. 74). Если подходящих углов несколько, запишите все.

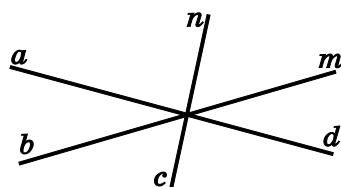


Рис. 74

5. На рисунке 76 изображён куб. Запишите прямые, перпендикулярные прямой AB , на которых лежат рёбра куба.

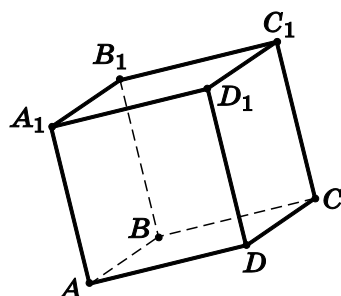


Рис. 76

Вариант 4

1. Начертите две пересекающиеся прямые. Обозначьте цифрами 1, 2, 3 и 4 четыре получившихся неразвёрнутых угла. Запишите все пары смежных и все пары вертикальных углов.
2. На рисунке 77 а изобразите угол, смежный с углом ABC , а на рисунке 77 б — угол, вертикальный углу ABC . Закрасьте дорисованный угол цветным карандашом.

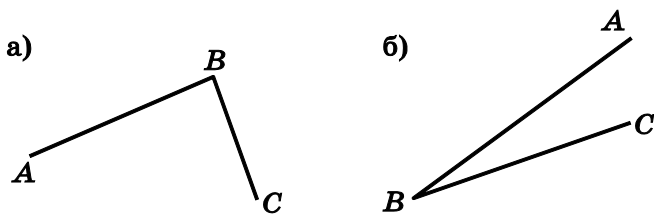


Рис. 77

3. На изображении пирамиды (рис. 79) постройте угол, вертикальный углу DAB , угол, смежный с углом DCA .

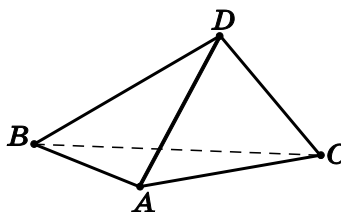


Рис. 79

4. Для выпуклого угла bc запишите вертикальный угол, а для выпуклого угла dn — смежный с ним (рис. 78). Если подходящих углов несколько, запишите все.

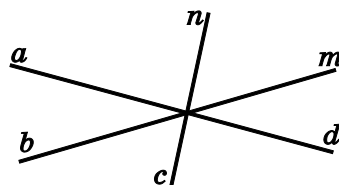


Рис. 78

5. На рисунке 80 изображён куб. Запишите прямые, перпендикулярные прямой C_1D_1 , на которых лежат рёбра куба.

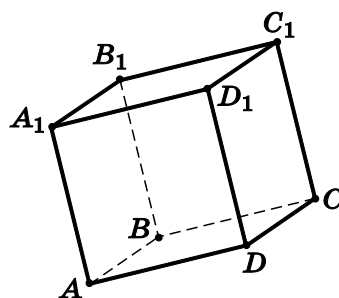


Рис. 80

Самостоятельная работа № 14 (к п. 3.7).

Действия с углами

Вариант 1

1. Глядя на рисунок 81, заполните пропуски в записи:

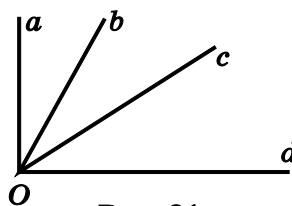


Рис. 81

- а) $\angle ac = \angle ______ + \angle ______;$
 б) $\angle bd = \angle ______ + \angle ______;$
 в) $\angle ad = \angle ______ + \angle ______.$
2. Закрасьте цветным карандашом один из углов, образованных соседними лучами (рис. 82). Запишите, разностью каких углов он является.

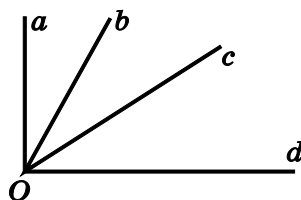


Рис. 82

$$\angle ab = \angle \underline{\hspace{1cm}} + \angle \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}} - \angle \underline{\hspace{1cm}};$$

$$\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}} - \angle \underline{\hspace{1cm}}.$$

3. На рисунке 83 изображены пять равных углов. Пусть $\angle ab = \alpha$. Сравните некоторые полученные углы с углом α . Заполните пустые места числами в записи:

а) $\angle ab = \underline{\hspace{1cm}} \alpha$;

б) $\angle be = \underline{\hspace{1cm}} \alpha$;

в) $\angle mb = \underline{\hspace{1cm}} \alpha$;

г) $\angle am = \underline{\hspace{1cm}} \alpha$;

д) $\angle cm = \underline{\hspace{1cm}} \alpha$;

е) $\angle bm = \underline{\hspace{1cm}} \alpha$.

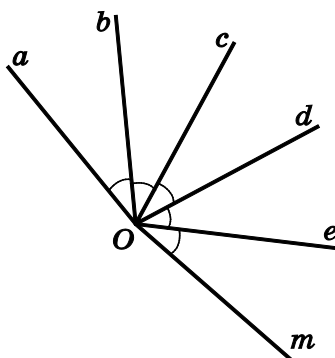


Рис. 83

4. Используя рисунок предыдущей задачи, выразите указанные углы через $\angle ac$, обозначив его буквой β . Заполните пустые места числами в записи:

а) $\angle ab = \underline{\hspace{1cm}} \beta$;

б) $\angle ac = \underline{\hspace{1cm}} \beta$;

в) $\angle ad = \underline{\hspace{1cm}} \beta$;

г) $\angle mb = \underline{\hspace{1cm}} \beta$;

д) $\angle am = \underline{\hspace{1cm}} \beta$;

е) $\angle dm = \underline{\hspace{1cm}} \beta$.

5. Сначала был построен угол bc . Затем, проведя луч Oa , получили угол ab (рис. 84).

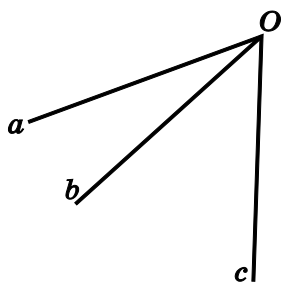


Рис. 84

Отложите от луча Oc угол cd , равный углу ab , так, чтобы луч Od был по другую сторону от луча Oc , чем луч Ob . Найдите на рисунке ещё одну пару углов, равных между собой. Докажите их равенство, используя следующую запись:

$$\angle ab = \angle cd \text{ (по построению);}$$

$$\text{след., } \angle ab + \angle ______ = \angle cd + \angle ______,$$

$$\text{т. е. } \angle ______ = \angle ______.$$

6. Какие из высказываний верные, а какие нет, запишите:

1) глядя на рисунок 85:

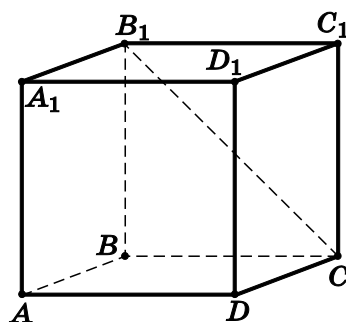


Рис. 85

а) $\angle BB_1C_1 = \angle BB_1C + \angle CB_1C_1$ _____;

б) $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1C + \angle CB_1C_1$ _____;

в) $\angle C_1CB_1 = \angle BCC_1 - \angle BCB_1$ _____;

г) $\angle C_1CB_1 = \angle C_1CD - \angle B_1CD$ _____;

2) глядя на рисунок 86:

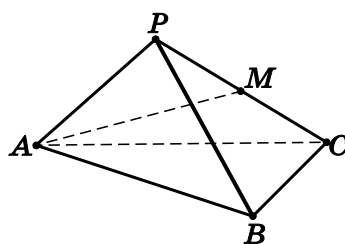


Рис. 86

- а) $\angle PAC + \angle CAB = \angle PAB$ _____ ;
 б) $\angle MAC = \angle PAC - \angle MAP$ _____ .

Вариант 2

1. Глядя на рисунок 87, заполните пропуски в записи:

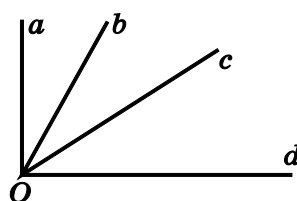


Рис. 87

- а) $\angle ab = \angle$ _____ $- \angle$ _____ ;
 б) $\angle bd = \angle$ _____ $- \angle$ _____ ;
 в) $\angle cd = \angle$ _____ $- \angle$ _____ .
2. Закрасьте цветным карандашом один из углов, не образованных соседними лучами (рис. 88). Запишите, суммой каких углов он является.

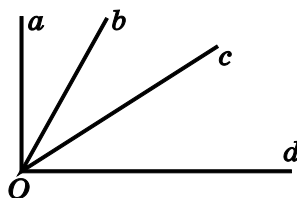


Рис. 88

$\angle ac = \angle$ _____ $+ \angle$ _____ ;
 $\angle$ _____ $= \angle$ _____ $+ \angle$ _____ ;
 $\angle$ _____ $= \angle$ _____ $+ \angle$ _____ .

3. На рисунке 89 изображены пять равных углов. Пусть $\angle cb = \beta$. Сравните некоторые полученные углы с углом β . Заполните пустые места числами в записи:

- а) $\angle ab =$ _____ β ;
 б) $\angle ta =$ _____ β ;
 в) $\angle tc =$ _____ β ;
 г) $\angle be =$ _____ β ;

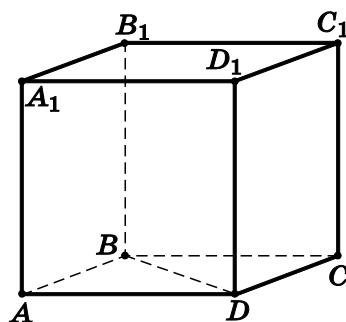


Рис. 91

а) $\angle B_1BD = \angle B_1BC + \angle CBD$ _____ ;

б) $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ _____ ;

в) $\angle CBD = \angle B_1BD - \angle B_1BC$ _____ ;

г) $\angle DBA = \angle CBA - \angle CBD$ _____ ;

2) глядя на рисунок 92:

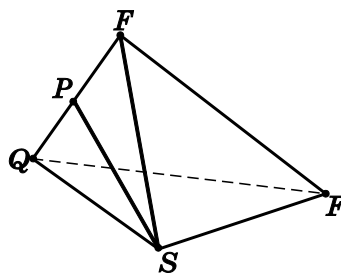


Рис. 92

а) $\angle PSE + \angle SEF = \angle PSF$ _____ ;

б) $\angle QPS = \angle QPE - \angle EPS$ _____ .

Вариант 3

1. Глядя на рисунок 93, заполните пропуски в записи:

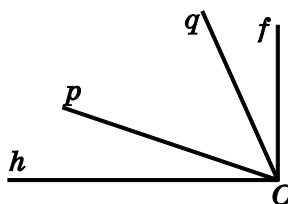


Рис. 93

а) $\angle pf = \angle \text{_____} + \angle \text{_____}$;

б) $\angle hq = \angle \text{_____} + \angle \text{_____}$;

в) $\angle fh = \angle \text{_____} + \angle \text{_____}$.

2. Закрасьте цветным карандашом один из углов, образованных соседними лучами (рис. 94). Запишите, разностью каких углов он является.

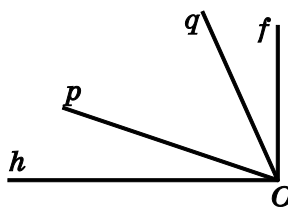


Рис. 94

$$\begin{aligned}\angle pq &= \angle ______ - \angle ______; \\ \angle ______ &= \angle ______ - \angle ______; \\ \angle ______ &= \angle ______ - \angle ______.\end{aligned}$$

3. На рисунке 95 изображены пять равных углов. Пусть $\angle bd = \alpha$. Сравните некоторые полученные углы с углом α . Заполните пустые места числами в записи:

- | | |
|--|--|
| а) $\angle ab = ______ \alpha$; | б) $\angle be = ______ \alpha$; |
| в) $\angle mb = ______ \alpha$; | г) $\angle am = ______ \alpha$; |
| д) $\angle cm = ______ \alpha$; | е) $\angle bm = ______ \alpha$. |

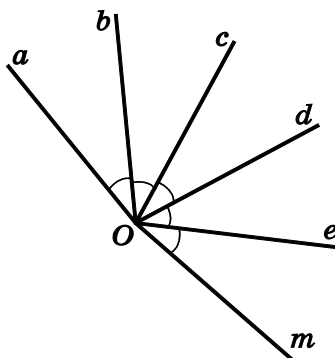


Рис. 95

4. Используя рисунок предыдущей задачи, выразите указанные углы через $\angle ad$, обозначив его буквой β . Заполните пустые места числами в записи:
- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| а) $\angle ab = ______ \beta$; | б) $\angle ac = ______ \beta$; |
| в) $\angle be = ______ \beta$; | г) $\angle mb = ______ \beta$; |
| д) $\angle am = ______ \beta$; | е) $\angle dm = ______ \beta$. |
5. Сначала был построен угол kp . Затем, проведя луч Om , получили угол km (рис. 96).

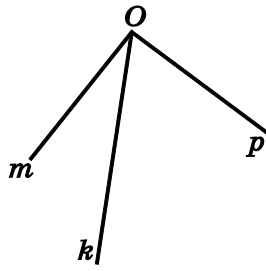


Рис. 96

Отложите от луча Om угол md , равный углу kp , так, чтобы луч Od был по другую сторону от луча Om , чем луч Ok . Найдите на рисунке ещё одну пару углов, равных между собой. Докажите их равенство, используя следующую запись:

$$\angle dm = \angle kp \text{ (по построению);}$$

$$\text{след., } \angle dm + \angle ______ = \angle kp + \angle ______,$$

$$\text{т. е. } \angle ______ = \angle ______.$$

6. Какие из высказываний верные, а какие нет, запишите:

1) глядя на рисунок 97:

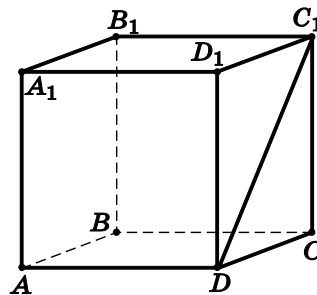


Рис.97

а) $\angle DC_1B_1 = \angle B_1C_1D_1 + \angle D_1C_1D$ _____;

б) $\angle D_1C_1C = \angle D_1C_1D + \angle DC_1C$ _____;

в) $\angle ADD_1 = \angle ADC_1 - \angle D_1DC_1$ _____;

г) $\angle C_1DC = \angle D_1DC - \angle C_1DD_1$ _____;

2) глядя на рисунок 98:

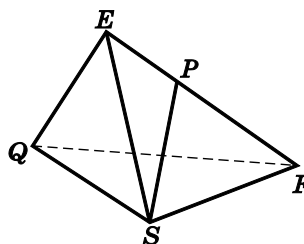


Рис. 98

а) $\angle PES + \angle QES = \angle PEQ$ _____ ;

б) $\angle ESP = \angle FSE - \angle ESP$ _____ .

Вариант 4

1. Глядя на рисунок 99, заполните пропуски в записи:

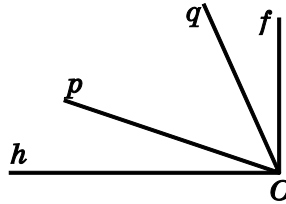


Рис. 99

а) $\angle pf = \angle$ _____ $- \angle$ _____ ;

б) $\angle hq = \angle$ _____ $- \angle$ _____ ;

в) $\angle fh = \angle$ _____ $- \angle$ _____ .

2. Закрасьте цветным карандашом один из углов, не образованных соседними лучами (рис. 100).

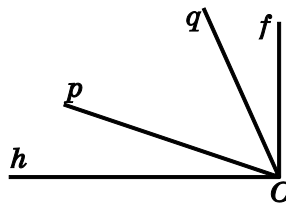


Рис. 100

Запишите, суммой каких углов он является.

$\angle pf = \angle$ _____ $+ \angle$ _____ ;

$\angle$ _____ $= \angle$ _____ $+ \angle$ _____ ;

$\angle$ _____ $= \angle$ _____ $+ \angle$ _____ .

3. На рисунке изображены пять равных углов (рис. 101).

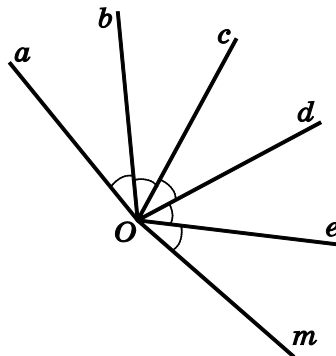


Рис. 101

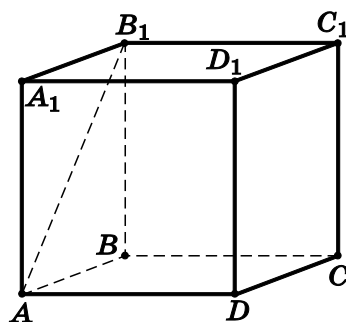


Рис. 103

- а) $\angle A_1AB = \angle B_1AA_1 + \angle BAB_1$ _____ ;
 б) $\angle B_1AD = \angle B_1AB + \angle BAD$ _____ ;
 в) $\angle AB_1B = \angle AB_1C_1 - \angle BB_1C_1$ _____ ;
 г) $\angle B_1AB = \angle A_1AB - \angle B_1AA_1$ _____ ;
 2) глядя на рисунок 104:

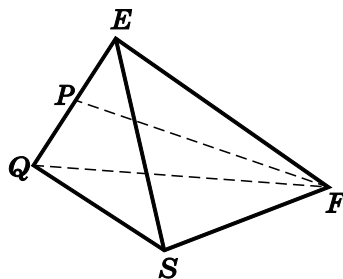


Рис. 104

- а) $\angle SQF + \angle FQP = \angle SQP$ _____ ;
 б) $\angle EPF = \angle QPE - \angle FPQ$ _____ .

Самостоятельная работа № 15 (к п. 3.8).

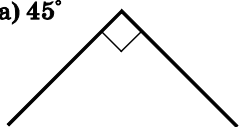
Измерение углов

Вариант 1

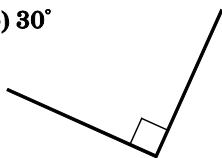
1. Используя прямые углы, данные на рисунке 105, изобразите на глаз углы, градусная мера которых составляет:

Закрасьте каждый из этих углов.

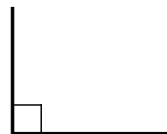
а) 45°



б) 30°



в) 60°



г) 120°



Рис. 105

2. Посмотрите на рисунок 106. Определите на глаз градусные меры углов AOB ; AOD ; BOC ; FOE ; BOE ; FOB ; FOC .

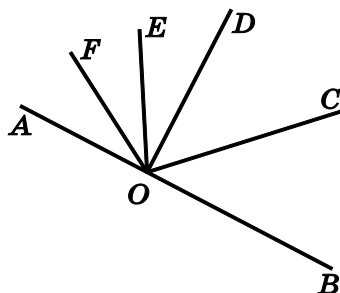


Рис. 106

3. На рисунке 107 изображён куб. Чему равна градусная мера углов: $A_1B_1C_1$; BAD ?

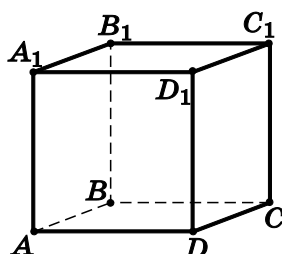


Рис. 107

Вариант 2

1. Используя прямые углы, данные на рисунке 108, изобразите на глаз углы, градусная мера которых составляет:

Закрасьте каждый из этих углов.

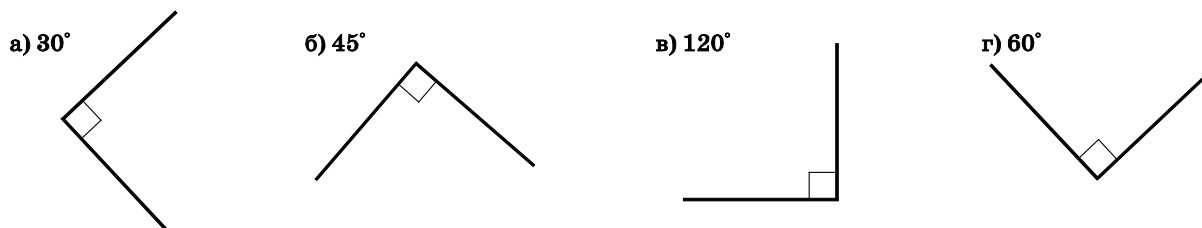


Рис. 108

2. Посмотрите на рисунок 109. Определите на глаз градусные меры углов: COB ; BOE ; FOE ; EOD ; BOA ; AOF ; FOD .

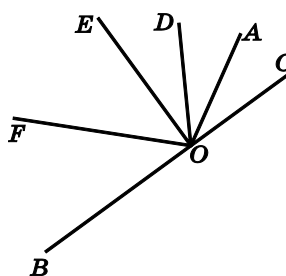


Рис. 109

3. На рисунке 110 изображён куб. Чему равна градусная мера углов: $A_1D_1C_1$; DCB ?

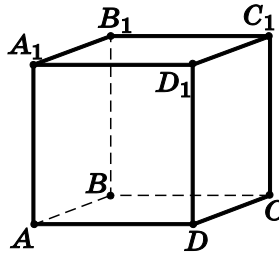


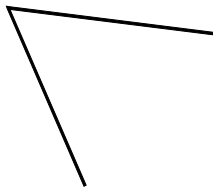
Рис. 110

Вариант 3

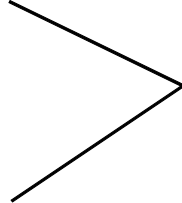
1. Используя углы по 60° , данные на рисунке 111, изобразите на глаз углы, градусная мера которых составляет:

Закрасьте каждый из этих углов.

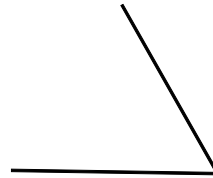
а) 45°



б) 30°



в) 60°



г) 120°

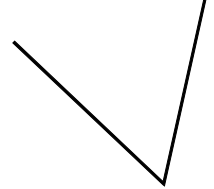


Рис. 111

2. Посмотрите на рисунок 112. Определите на глаз градусные меры углов: KOQ ; MOQ ; LOK ; QOP ; POK ; LOP ; NOL .

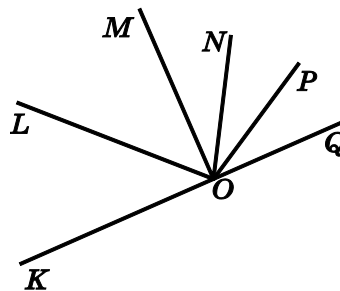


Рис. 112

3. На рисунке 113 изображён куб. Чему равна градусная мера углов: $A_1B_1C_1$; DCB ; D_1DC_1 ?

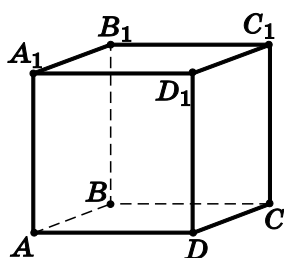


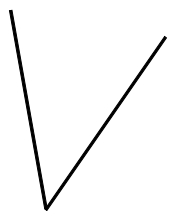
Рис. 113

Вариант 4

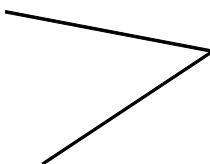
1. Используя углы по 45° , данные на рисунке 114, изобразите на глаз углы, градусная мера которых составляет:

Закрасьте каждый из этих углов.

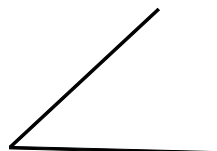
а) 30°



б) 60°



в) 135°



г) 90°

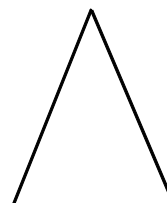


Рис. 114

2. Посмотрите на рисунок 115. Определите на глаз градусные меры углов: BOA ; DOB ; COD ; FOE ; BOF ; FOC ; EOC .

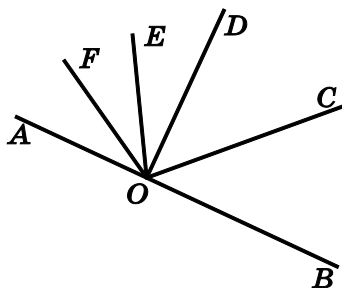


Рис. 115

3. На рисунке 116 изображён куб. Чему равна градусная мера углов: A_1AB ; DAB ; C_1CD_1 ?

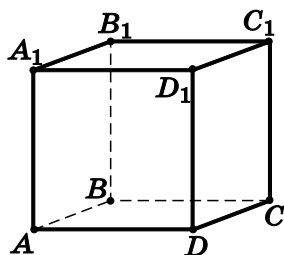


Рис. 116

Самостоятельная работа № 16 (к п. 3.8).

Измерение углов.

Вариант 1

Определите градусную меру угла x по рисунку 117.

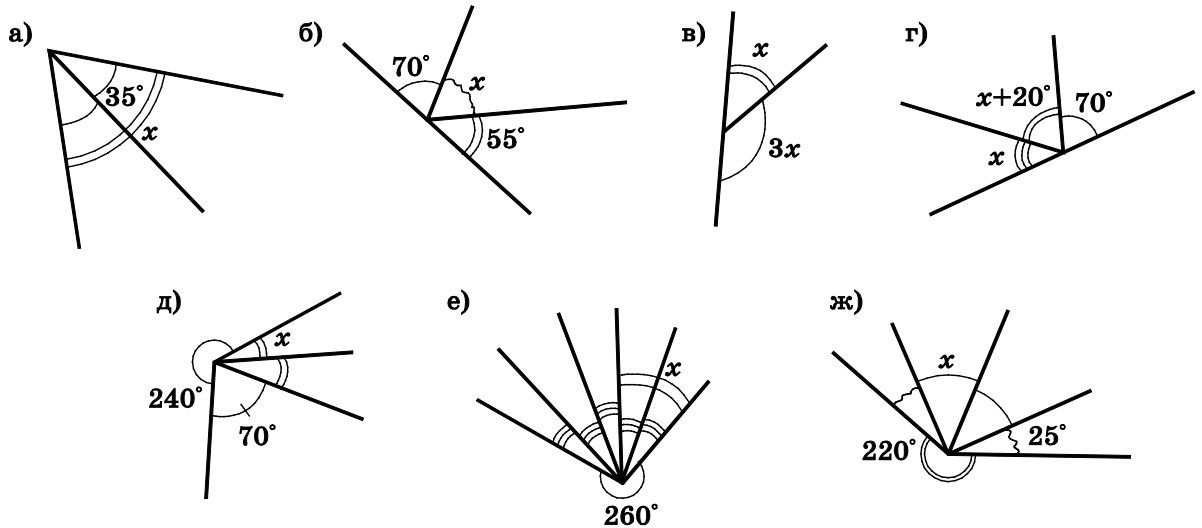


Рис. 117

Вариант 2

Определите градусную меру угла y по рисунку 118.

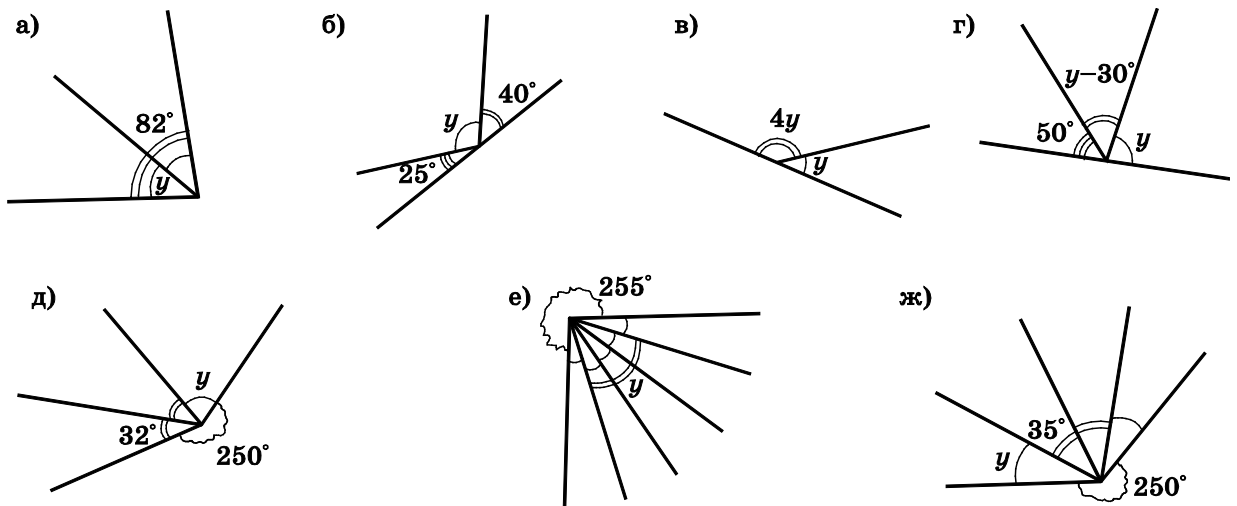


Рис. 118

Вариант 3

Определите градусную меру угла k по рисунку 119.

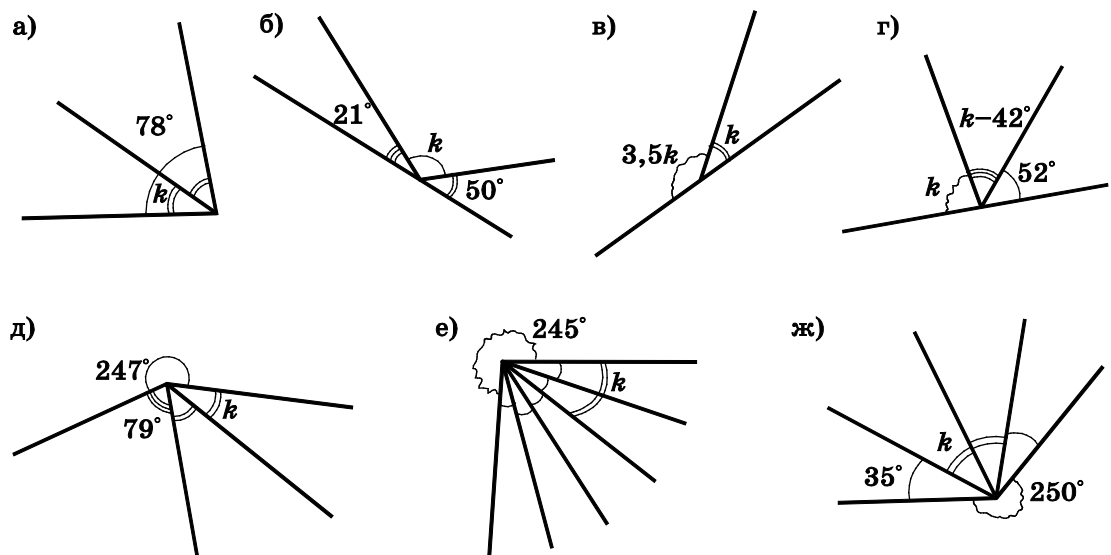


Рис. 119

Вариант 4

Определите градусную меру угла p по рисунку 120.

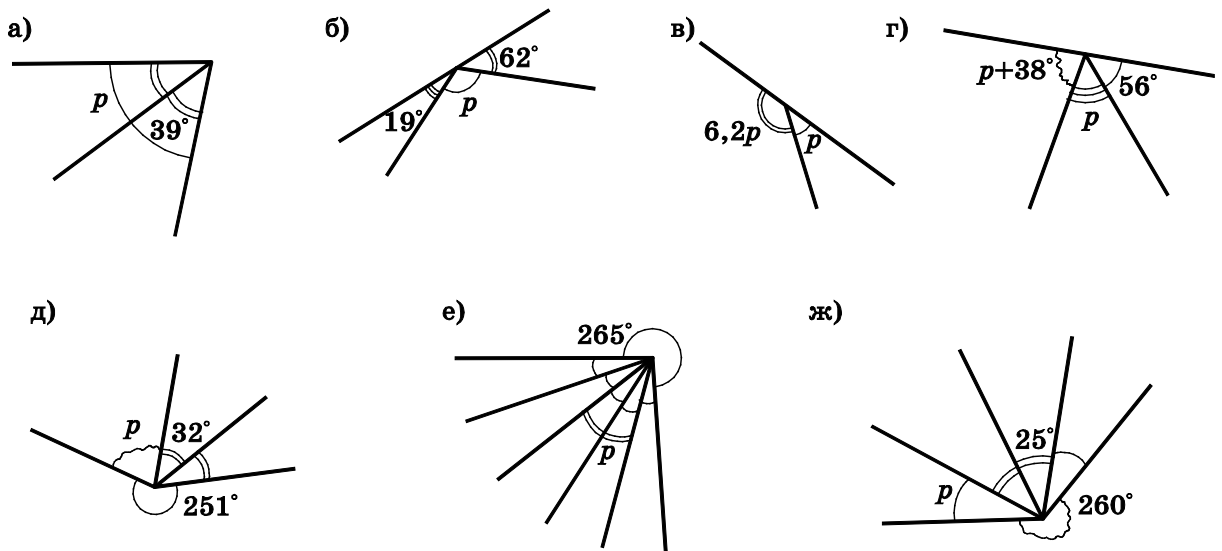


Рис. 120

Самостоятельная работа № 17 (к п. 3.9).

Двугранные углы

Вариант 1

1. На изображении куба (рис. 121) и тетраэдра (рис. 122) выделите двугранный угол:

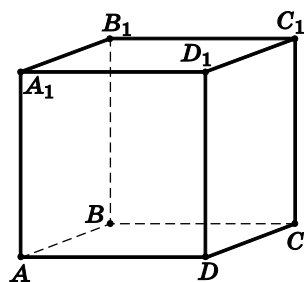


Рис. 121

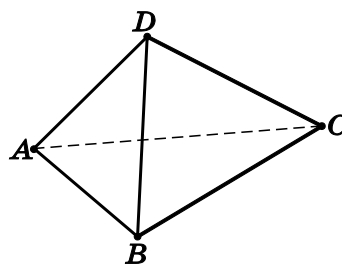


Рис. 122

- а) образованный гранями AA_1B_1B и BB_1C_1C . Назовите ребро этого двугранного угла;
- б) образованный гранями ABD и ABC . Назовите ребро этого двугранного угла.
2. Изобразите двугранный угол (рис. 123):
- а) смежный с данным; б) вертикальный данному.

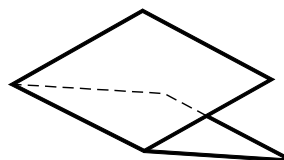
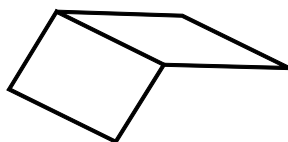


Рис. 123

3. На изображении параллелепипеда закрасьте цветным карандашом грани двугранного угла, являющегося суммой трёх двугранных углов.

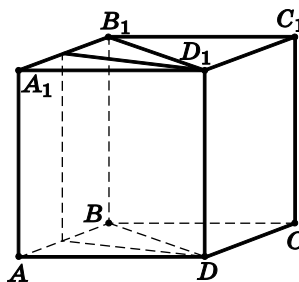


Рис. 124

Вариант 2

1. На изображении куба (рис. 125) и тетраэдра (рис. 126) выделите двугранный угол:

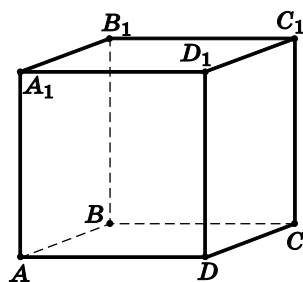


Рис. 125

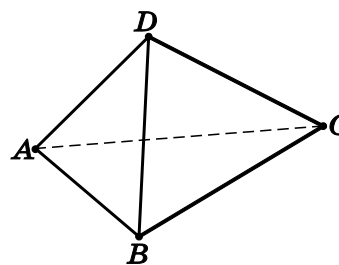


Рис. 126

а) образованный гранями BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D$. Назовите ребро этого двугранного угла;

б) образованный гранями ACD и DBC . Назовите ребро этого двугранного угла.

2. Изобразите двугранный угол на рисунке 127:



Рис. 127

а) вертикальный данному;

б) смежный с данным.

3. На изображении параллелепипеда закрасьте цветным карандашом грани двугранного угла, являющегося суммой трёх двугранных углов.

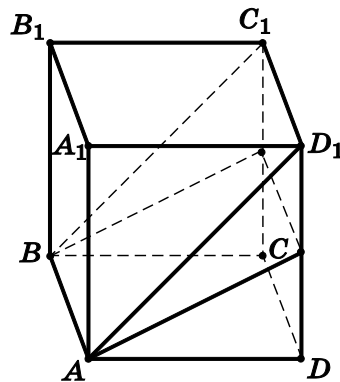


Рис. 128

Вариант 3

1. На изображении куба (рис. 129) и пирамиды (рис. 130) выделите двугранный угол:

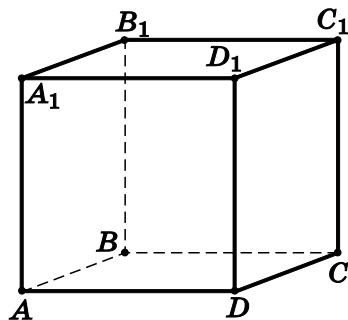


Рис. 129

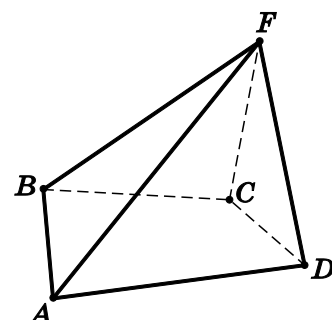


Рис. 130

- а) образованный гранями $ABCD$ и BB_1C_1C . Назовите ребро этого двугранного угла;
- б) образованный гранью ABF и основанием. Назовите ребро этого двугранного угла.

2. Изобразите двугранный угол на рисунке 131:

- а) смежный с данным; б) вертикальный данному.



Рис. 131

3. На изображении параллелепипеда закрасьте цветным карандашом грани двугранного угла, являющегося суммой двух двугранных углов, грани которых не совпадают с гранями куба. Запишите, какие плоскости являются гранями этого угла (при необходимости обозначьте все точки). Сравните полученный двугранный угол с: а) прямым двугранным углом; б) двугранным углом, величина которого 50° . Объясните сравнение.

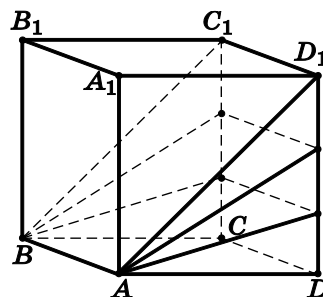


Рис. 132

Вариант 4

1. На изображении куба (рис. 133) и пирамиды (рис. 134) выделите двугранный угол:

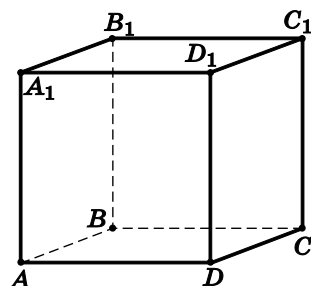


Рис. 133

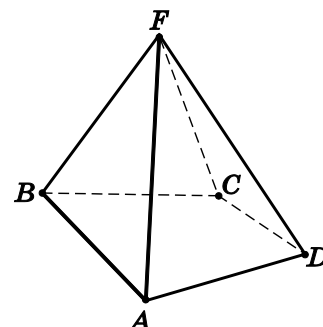


Рис. 134

- а) образованный гранями DD_1C_1C и $ABCD$. Назовите ребро этого двугранного угла;
- б) образованный основанием и гранью ADF . Назовите ребро этого двугранного угла.
2. Изобразите двугранный угол на рисунке 135:
- а) вертикальный данному; б) смежный с данным.



Рис. 135

3. На изображении параллелепипеда закрасьте цветным карандашом грани двугранного угла, являющегося суммой двух двугранных углов, грани которых не совпадают с гранями куба. Запишите, какие плоскости являются гранями этого угла (при необходимости обозначьте все точки). Сравните полученный двугранный угол с: а) прямым двугранным углом; б) двугранным углом, величина которого 60° . Объясните сравнение.

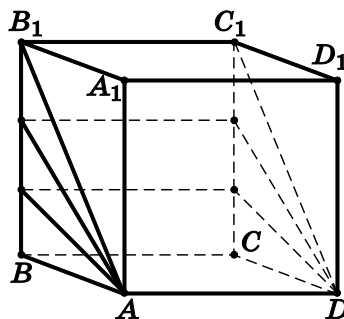


Рис. 136

Самостоятельная работа № 18 (к пп. 4.1, 4.2).

Элементы треугольника

Вариант 1

1. Изобразите треугольник AMK . Запишите:
- а) сторону, противоположную углу A ;
- б) два угла, прилежащие к стороне AM ;
- в) угол, образованный сторонами AM и MK ;

- г) угол, противолежащий стороне MK .
2. Изобразите на глаз в треугольнике AMK медиану, проведённую к стороне AM . Покажите на рисунке, что это медиана.
3. Определите по рисунку 137, какой из отрезков является медианой треугольника ABC . Медианой какого треугольника является отрезок CM ?

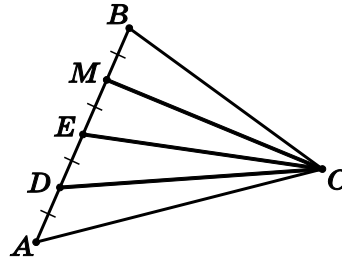


Рис. 137

4. Изобразите треугольник ABC , а потом изобразите другой треугольник так, чтобы отрезок AB был его медианой.

Вариант 2

1. Изобразите треугольник MQR . Запишите:
- сторону, противолежащую углу Q ;
 - два угла, прилежащие к стороне MP ;
 - угол, образованный сторонами QM и MP ;
 - угол, противолежащий стороне MQ .
2. Изобразите на глаз в треугольнике MQR медиану, проведённую к стороне QM . Покажите на рисунке, что это медиана.
3. Определите по рисунку 138, какой из отрезков является медианой треугольника DAN . Медианой какого треугольника является отрезок NF ?

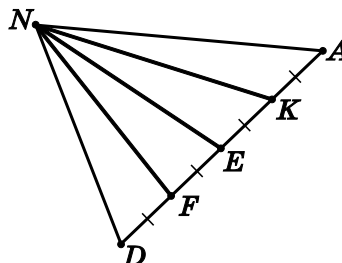


Рис. 138

4. Изобразите треугольник KDF , а потом изобразите другой треугольник так, чтобы отрезок KF был его медианой.

Вариант 3

1. Изобразите треугольник MKE . Запишите:
 - а) сторону, противолежащую углу M ;
 - б) два угла, прилежащие к стороне ME ;
 - в) угол, образованный сторонами MK и EK ;
 - г) угол, противолежащий стороне MK .
2. Определите по рисунку 139, какой из отрезков является медианой треугольника ACE . Запишите треугольник (или треугольники), для которого (которых) отрезок CE является медианой. Запишите треугольник (или треугольники), одна из сторон которого (которых) лежит на прямой AB , причём эта сторона больше, чем DE , и в этом треугольнике не проведена медиана.

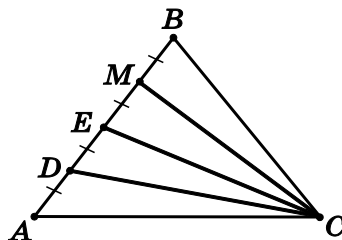


Рис. 139

3. Изобразите треугольник PQD , а потом изобразите другой треугольник так, чтобы отрезок PQ был его медианой, точка P не была вершиной, а точки Q и D были вершинами.

Вариант 4

1. Изобразите треугольник BCD . Запишите:
 - а) сторону, противолежащую углу B ;
 - б) два угла, прилежащие к стороне DC ;
 - в) угол, образованный сторонами CB и DB ;
 - г) угол, противолежащий стороне BD .
2. Определите по рисунку 140, какой из отрезков является медианой треугольника ANE . Запишите треугольник (или треугольники), для которого (которых) отрезок NE является медианой. Запишите треугольник (или треугольники), одна из сторон которого (которых) лежит на прямой AD , причём эта сторона больше, чем FE , и в этом треугольнике не проведена медиана.

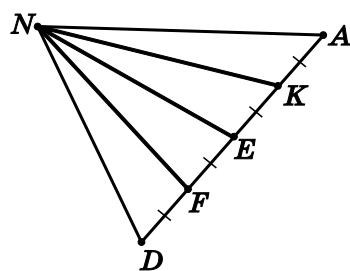


Рис. 140

3. Изобразите треугольник ABC , а потом изобразите другой треугольник так, чтобы отрезок BC был его медианой, точка C не была вершиной, а точки A и B были вершинами.

Самостоятельная работа № 19 (к п. 4.3).

Первый признак равенства треугольников

Вариант 1

1. На рисунках 141—143 соедините отрезками точки так, чтобы получились равные треугольники. Докажите, что полученные треугольники равны между собой, и укажите пары равных углов.

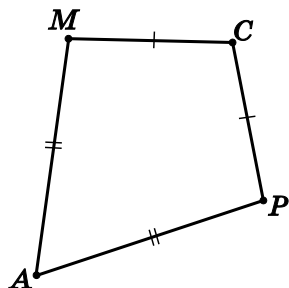


Рис. 141

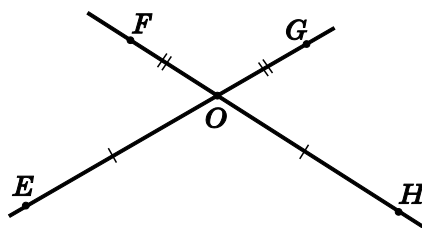


Рис. 142

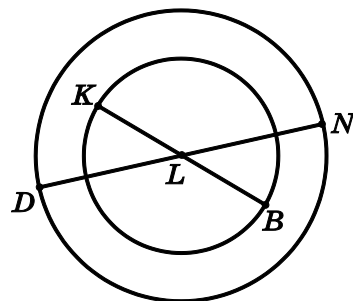


Рис. 143

2. Найдите на рисунке 144 равные треугольники. Докажите, что они равны.

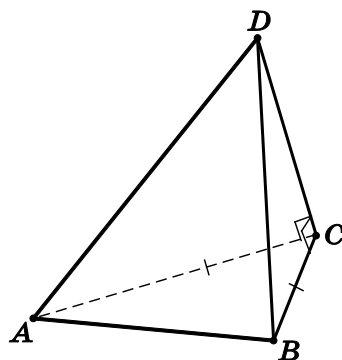


Рис. 144

Вариант 2

1. На рисунках 145—147 соедините отрезками точки так, чтобы на каждом рисунке получились равные треугольники. Докажите, что полученные треугольники равны между собой, и укажите пары равных углов.

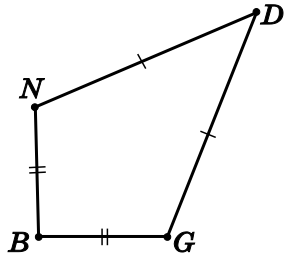


Рис. 145

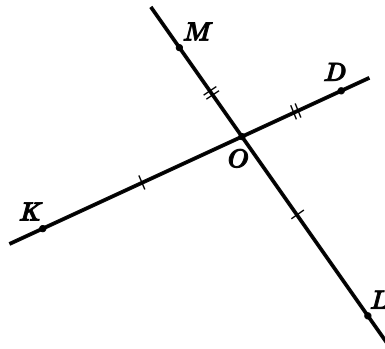


Рис. 146

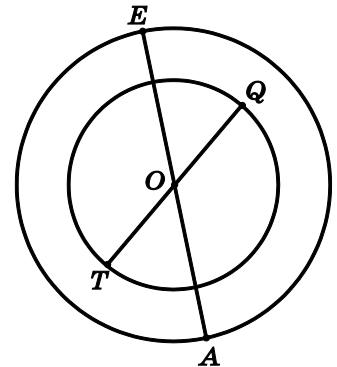


Рис. 147

2. Найдите на рисунке 148 равные треугольники. Докажите, что они равны.

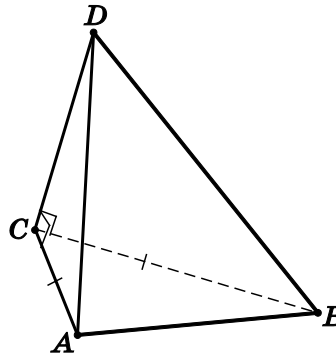


Рис. 148

Вариант 3

1. На рисунках 149—151 соедините отрезками точки так, чтобы на каждом рисунке получились равные треугольники. Докажите, что полученные треугольники равны между собой, и укажите пары равных углов.

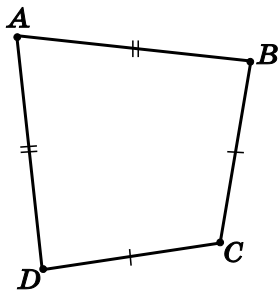


Рис. 149

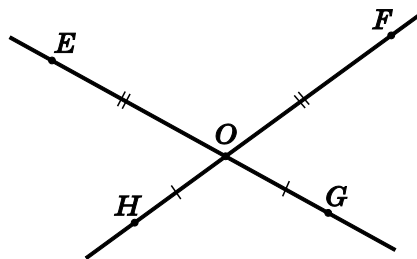


Рис. 150

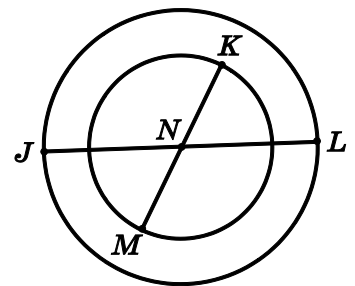


Рис. 151

2. Найдите на рисунке 152 равные треугольники. Докажите, что они равны.

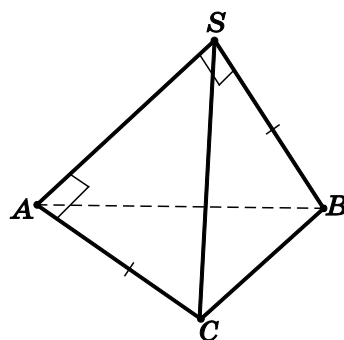


Рис. 152

Вариант 4

1. На рисунках 153—155 соедините отрезками точки так, чтобы на каждом рисунке получились равные треугольники. Докажите, что полученные треугольники равны между собой, и укажите пары равных углов.

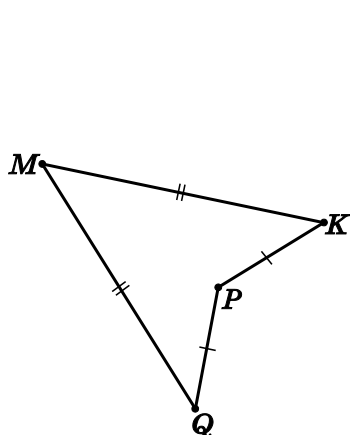


Рис. 153

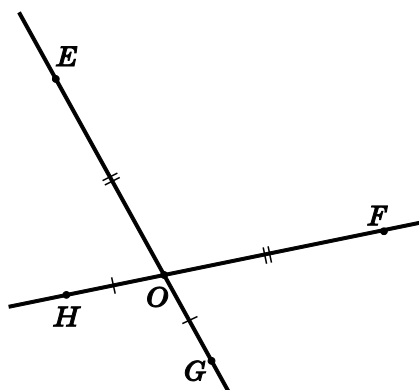


Рис. 154

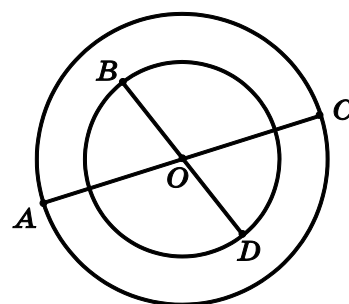


Рис. 155

2. Найдите на рисунке 156 равные треугольники. Докажите, что они равны.

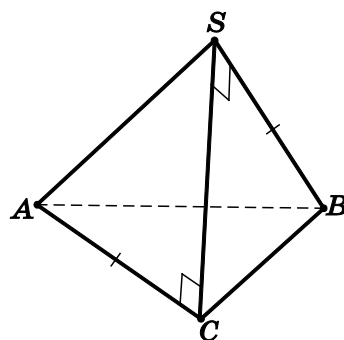


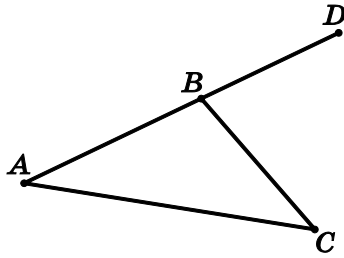
Рис. 156

Самостоятельная работа № 20 (к п. 4.5).

Теорема о внешнем угле треугольника. Классификация треугольников

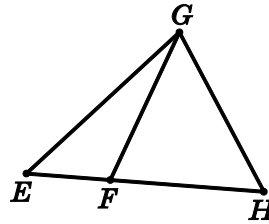
Вариант 1

1. Сравните указанные углы на рисунках 157—159.



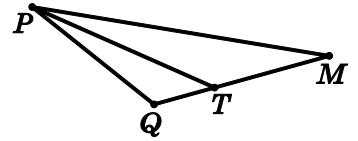
$\angle ACB$ и $\angle DBC$

Рис. 157



$\angle EFG$ и $\angle FGH$

Рис. 158



$\angle PTM$ и $\angle PQT$

Рис. 159

- Один из внешних углов треугольника равен 57° . Может ли в этом треугольнике быть угол: а) 123° ; б) 83° ?
- Существует ли треугольник MPQ , в котором $\angle M = 89^\circ$ и $\angle Q = 92^\circ$?
- Запишите, какой треугольник на рисунке 160 является: прямоугольным; остроугольным; тупоугольным.

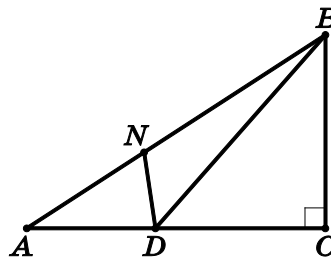
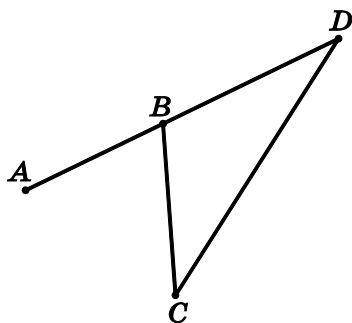


Рис. 160

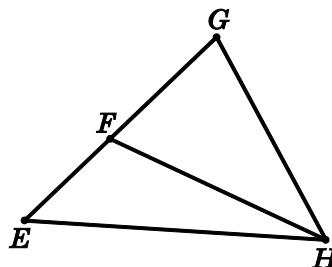
Вариант 2

1. Сравните указанные углы на рисунках 161—163.



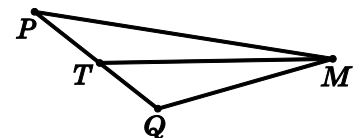
$\angle ABC$ и $\angle DBC$

Рис. 161



$\angle EHF$ и $\angle GFH$

Рис. 162



$\angle PTM$ и $\angle MQT$

Рис. 163

- Один из внешних углов треугольника равен 73° . Может ли в этом треугольнике быть угол: а) 77° ; б) 107° ?

3. Существует ли треугольник ABC , в котором $\angle C = 99^\circ$ и $\angle A = 82^\circ$?
4. Запишите, какой треугольник на рисунке 164 является: прямоугольным; остроугольным; тупоугольным.

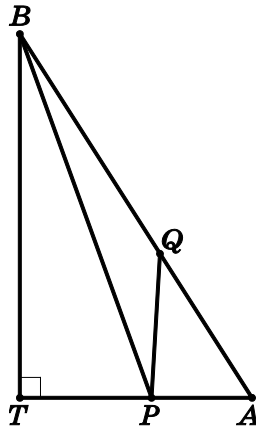
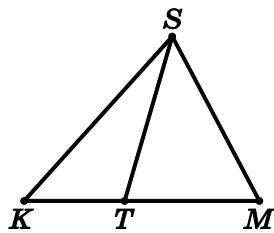


Рис. 164

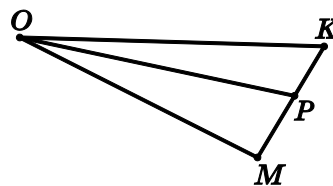
Вариант 3

1. Сравните углы на рисунках 165—167. Ответы обоснуйте.



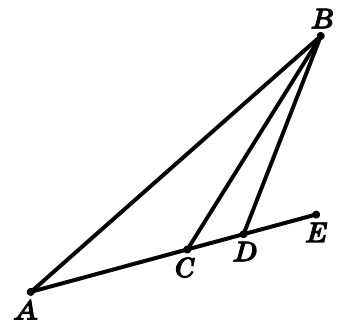
$\angle MST$ и $\angle KTS$

Рис. 165



$\angle OPK$ и $\angle OMK$

Рис. 166



$\angle ABC$ и $\angle BDE$

Рис. 167

2. Один из внешних углов треугольника равен 67° . Может ли в этом треугольнике быть угол: а) равный 73° ; б) больше 113° ? Ответы обоснуйте.
3. Существует ли треугольник MPK , в котором угол M равен $92,9^\circ$, а угол K равен $87,2^\circ$?
4. Запишите, какой из треугольников на рисунке 168 является: остроугольным; тупоугольным; прямоугольным.

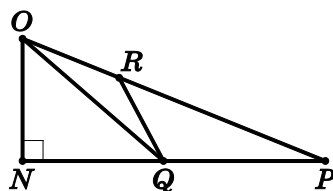


Рис. 168

Вариант 4

1. Сравните углы на рисунках 169—171. Ответы обоснуйте.

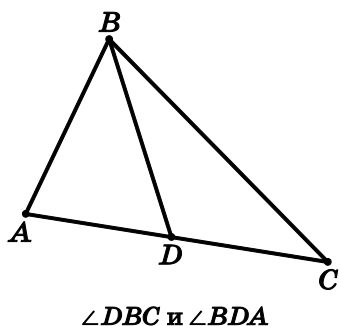


Рис. 169

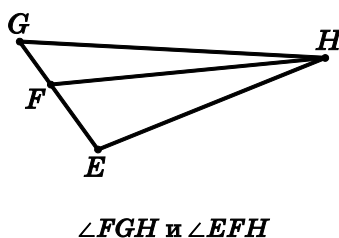


Рис. 170

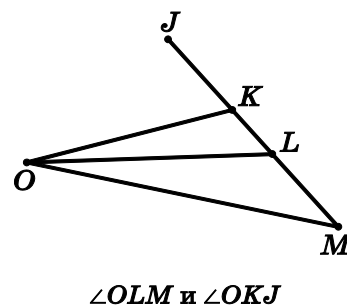


Рис. 171

- Один из внешних углов треугольника равен 71° . Может ли в этом треугольнике быть угол: а) больше 109° ; б) равный 76° ? Ответы обоснуйте.
- Существует ли треугольник DFG , в котором угол D равен $90,3^\circ$, а угол G равен $89,2^\circ$?
- Какой из треугольников на рисунке 172 является: остроугольным; тупоугольным; прямоугольным?

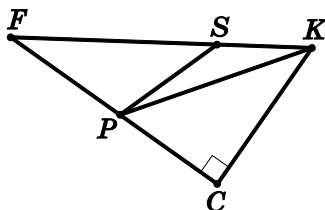


Рис. 172

Самостоятельная работа № 21 (к п. 4.6).

Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра

Вариант 1

5. На рисунке 177 изображён куб. Напишите два перпендикуляра к прямой B_1C_1 :

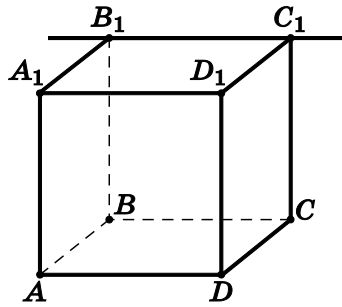


Рис. 177

- а) параллельные между собой;
- б) пересекающиеся;
- в) скрещивающиеся.

Вариант 2

1. Опустите перпендикуляр из точек K и M на прямые a и b соответственно (рис. 178):

- а) на глаз;
- б) с помощью угольника.

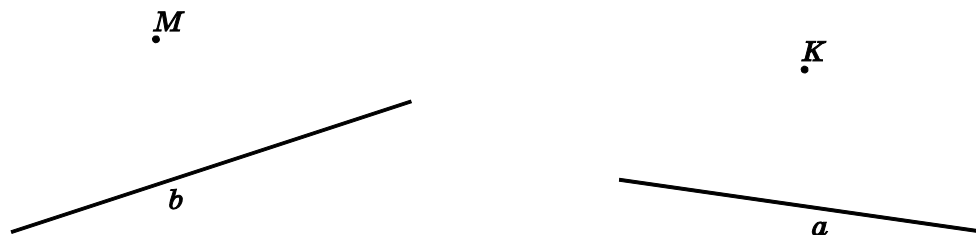


Рис. 178

2. Используя данную прямую и угольник, постройте две параллельные прямые (рис. 179).

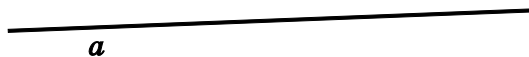


Рис. 179

3. Используя рисунок 180, постройте две хорды, параллельные друг другу и находящиеся по разные стороны от центра.

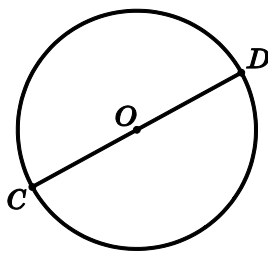


Рис. 180

4. На рисунке 181 $MKPQ$ — прямоугольник. Какие его стороны лежат на параллельных прямых?

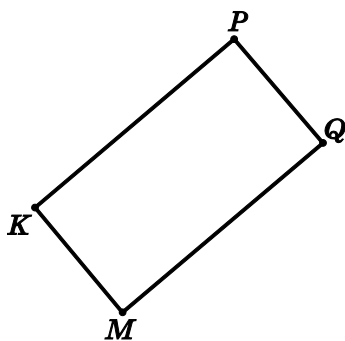


Рис. 181

5. На рисунке 182 изображён куб. Напишите два перпендикуляра к прямой AB :

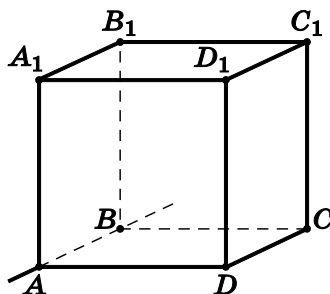


Рис. 182

- а) параллельные между собой;
- б) пересекающиеся;
- в) скрещивающиеся.

Вариант 3

1. Опустите перпендикуляр из точек N , O и P на прямые k , d и t соответственно (рис. 183):

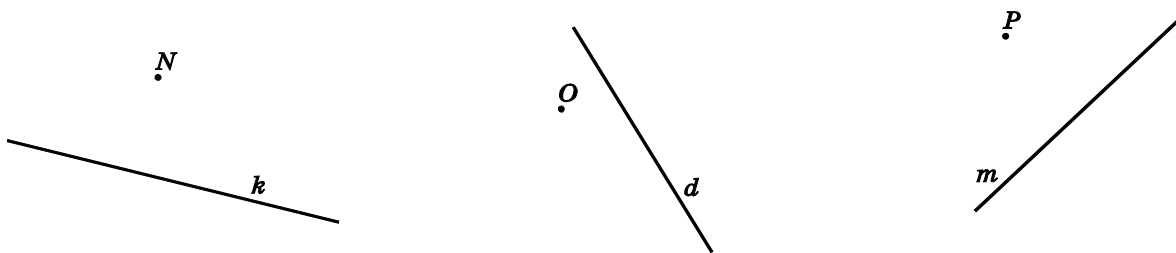


Рис. 183

- а) на глаз; б) с помощью угольника; в) с помощью циркуля и линейки.
2. Используя данную прямую a , циркуль и линейку, постройте две параллельные прямые (рис. 184).



Рис. 184

3. Постройте две хорды, параллельные друг другу и данному диаметру, находящиеся по разные стороны от центра (рис. 185).

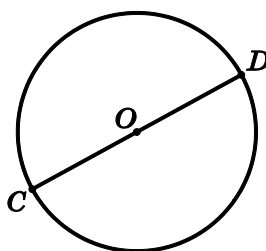


Рис. 185

4. На рисунке 186 $ABCDEF$ — шестиугольник. Докажите, что в $ABCDEF$ есть три пары параллельных сторон.

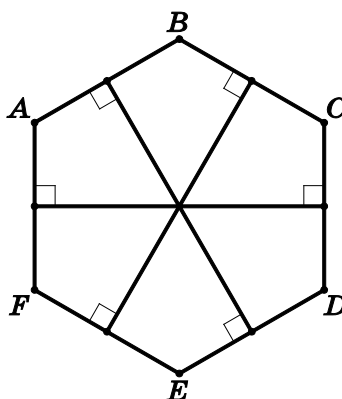


Рис. 186

5. На рисунке 187 изображён куб. Напишите два перпендикуляра к прямой BC :

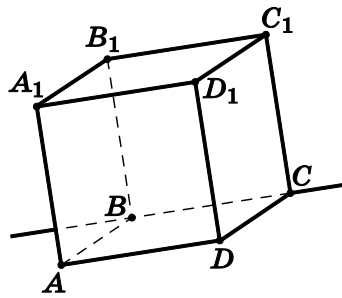


Рис. 187

- а) параллельные между собой;
- б) пересекающиеся;
- в) скрещивающиеся.

Вариант 4

1. Опустите перпендикуляр из точек N , O и P на прямые k , d и m соответственно (рис. 188):

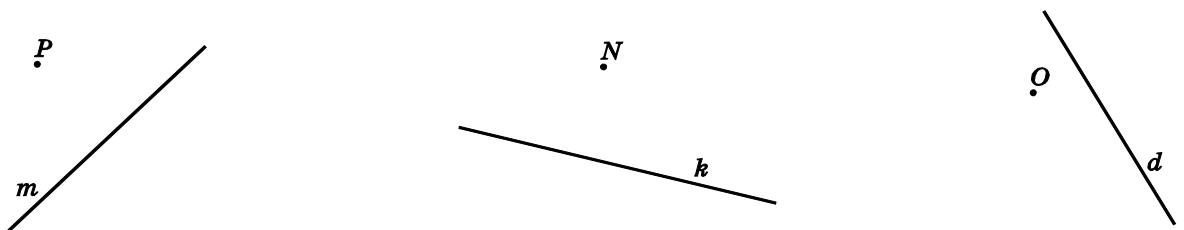


Рис. 188

- а) на глаз; б) с помощью угольника; в) с помощью циркуля и линейки.
2. Используя данную прямую b (рис. 189), циркуль и линейку, постройте две параллельные прямые.



Рис. 189

3. Постройте две хорды, параллельные друг другу и данному диаметру (рис. 190), находящиеся по одну сторону от центра.

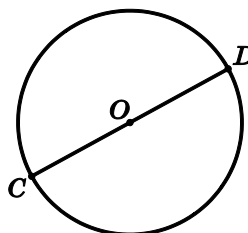


Рис. 190

4. На рисунке 191 $STUVQR$ — шестиугольник. Докажите, что в этом шестиугольнике есть три пары параллельных сторон.

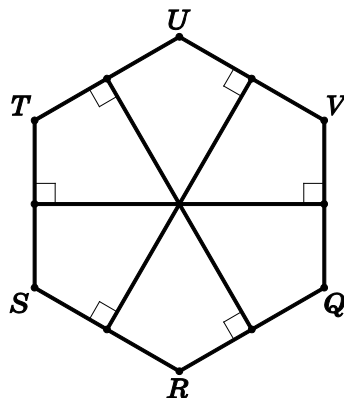


Рис. 191

5. На рисунке 192 изображён куб. Напишите два перпендикуляра к прямой D_1C_1 :

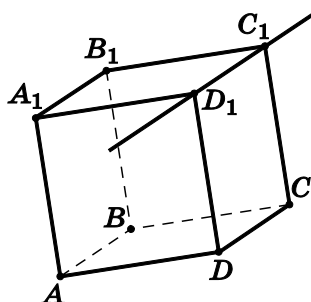


Рис. 192

- а) параллельные между собой;
- б) пересекающиеся;
- в) скрещивающиеся.

Самостоятельная работа № 22 (к п. 4.7).

Второй признак равенства треугольников

Вариант 1

1. Рассмотрите рисунок 193. Какое дополнительное построение надо сделать, чтобы получились два равных треугольника? Введите все необходимые обозначения и докажите равенство треугольников. Запишите равные стороны этих треугольников.

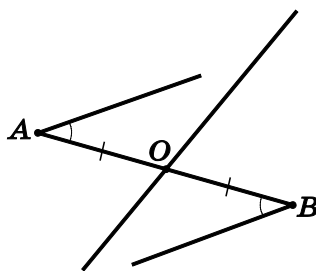


Рис. 193

2. На рисунке 194 $OL = OT$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник MOL равен треугольнику POT . Запишите, какие отрезки равны отрезкам OM и PT .

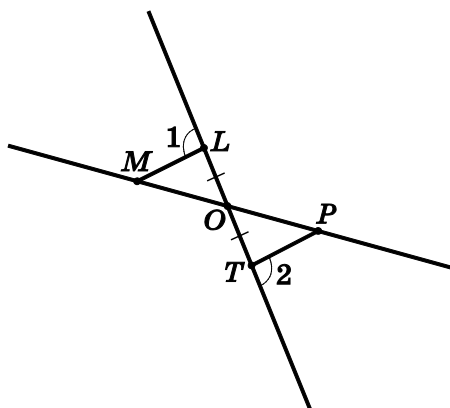


Рис. 194

Вариант 2

1. Рассмотрите рисунок 195. Какое дополнительное построение надо сделать, чтобы получились два равных треугольника? Введите все необходимые обозначения и докажите равенство треугольников. Запишите равные стороны этих треугольников.

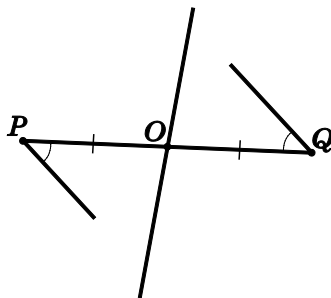


Рис. 195

2. На рисунке 196 $LO = TO$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник MOL равен треугольнику POT . Запишите, какие отрезки равны отрезкам ML и OM .

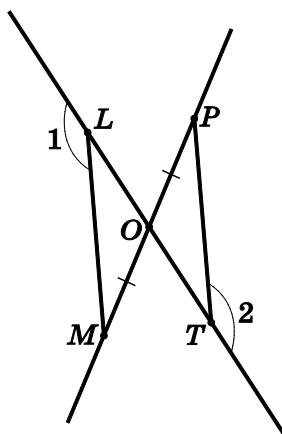


Рис. 196

Вариант 3

1. Рассмотрите рисунок 197. Какое дополнительное построение надо сделать, чтобы получились два равных треугольника? Введите все необходимые обозначения и докажите равенство треугольников. Запишите равные стороны этих треугольников.

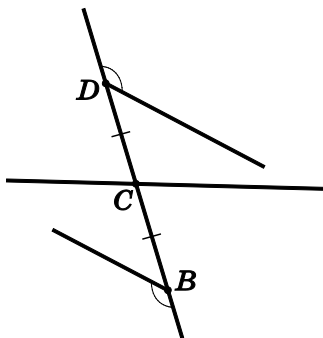


Рис. 197

2. На рисунке 198 $HEGF$ — пирамида, $\angle 1 = \angle 2$. Отрезки HE и HF равны. Углы EHG и FHE равны между собой. Найдите на рисунке равные треугольники и докажите их равенство.

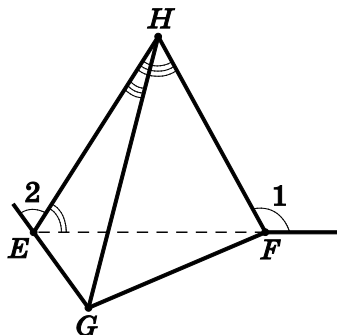


Рис. 198

Вариант 4

1. Рассмотрите рисунок 199. Какое дополнительное построение надо сделать, чтобы получились два равных треугольника? Введите все необходимые обозначения и доказите равенство треугольников. Запишите равные стороны этих треугольников.

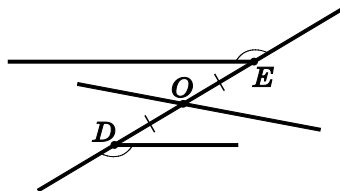


Рис. 199

2. На рисунке 200 $ABCS$ — пирамида, $\angle 1 = \angle 2$. Отрезки AS и SC равны. Углы ASC и BSA равны между собой. Найдите на рисунке равные треугольники и доказите их равенство.

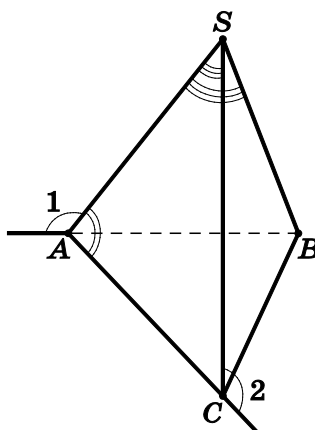


Рис. 200

Самостоятельная работа № 23 (к п. 4.8).

Высота треугольника

Вариант 1

1. Проведите высоту BH треугольника ABC (рис. 201) на глаз. Выделите её цветом.

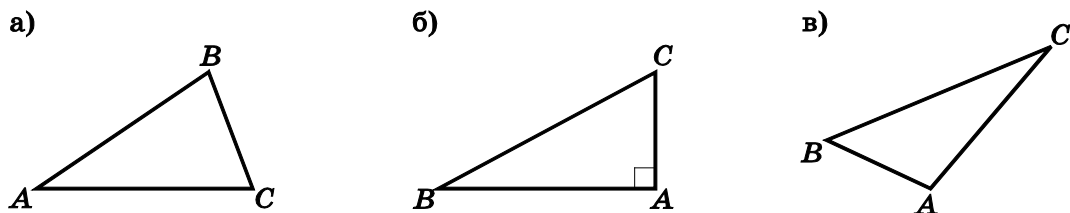


Рис. 201

2. В треугольнике MEK (рис. 202) из вершины K проведите:

а) медиану и высоту;

б) биссектрису и высоту.

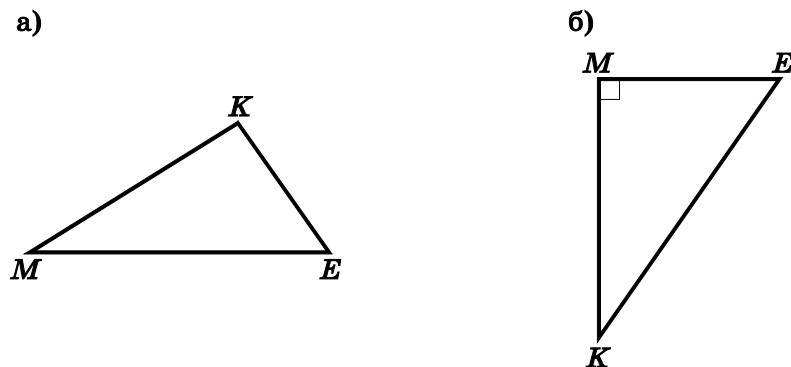


Рис. 202

3. Из вершины Q проведите медиану, биссектрису и высоту треугольника DQN (рис. 203). Сравните длины этих отрезков.

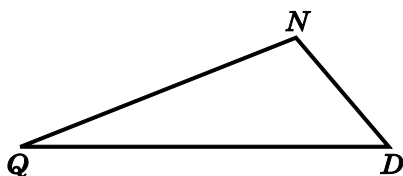


Рис. 203

4. Нарисуйте произвольный треугольник PDE . Проведите в нём две медианы: PP_1 и DD_1 . Обозначьте точку их пересечения буквой M . Измерьте отрезки PM и MP_1 , DM и MD_1 . Сделайте предположение о свойстве медиан треугольника.

Вариант 2

1. Проведите высоту DH треугольника MKD (рис. 204) на глаз. Выделите её цветом.

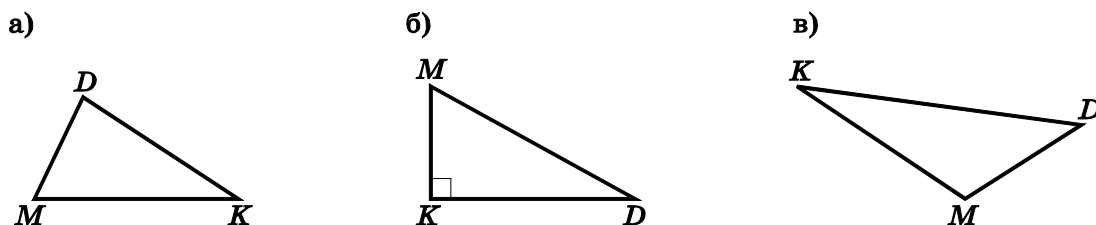


Рис. 204

2. В треугольнике ABC (рис. 205) из вершины B постройте:

а) медиану и высоту;

б) биссектрису и высоту.

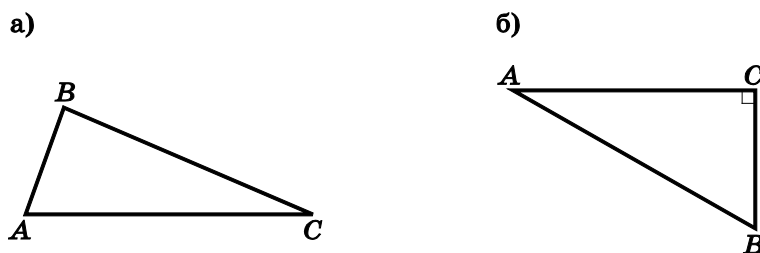


Рис. 205

3. Из вершины E постройте медиану, биссектрису и высоту треугольника NEP (рис. 206). Сравните длины этих отрезков.

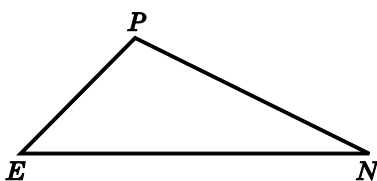


Рис. 206

4. Нарисуйте произвольный треугольник ABC . Проведите в нём две медианы: AA_1 и BB_1 . Обозначьте точку их пересечения буквой M . Измерьте отрезки AM и MA_1 , BM и MB_1 . Сделайте предположение о свойстве медиан треугольника.

Вариант 3

1. Проведите высоту PK треугольника PMA (рис. 207) на глаз.

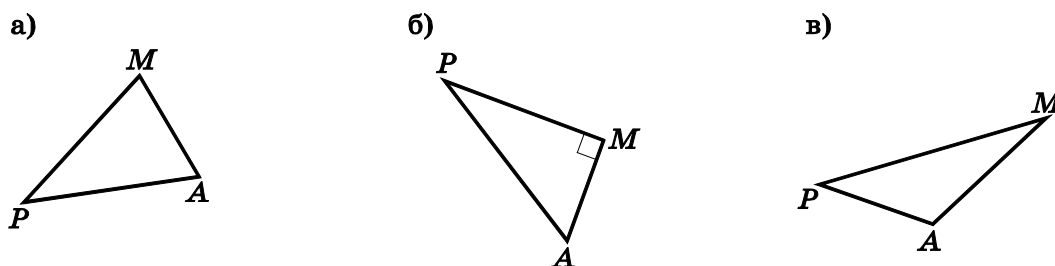


Рис. 207

2. В треугольнике ABC постройте медиану, биссектрису и высоту, исходящие из вершины B . Сравните длины этих отрезков.

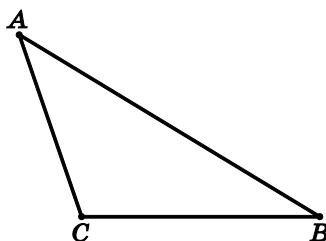


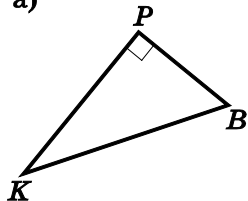
Рис. 208

3. Нарисуйте произвольный треугольник ABC . Постройте в нём две биссектрисы: AA_1 и BB_1 . Измерьте отрезки, на которые биссектрисы разбивают стороны. Измерьте стороны треугольника. Вычислите отношения $\frac{A_1C}{A_1B}$, $\frac{AC}{AB}$. Сделайте предположение о свойстве биссектрис треугольника. Проверьте это предположение для второй биссектрисы.

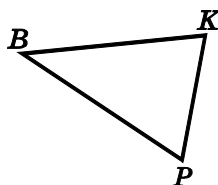
Вариант 4

1. Проведите высоту KA треугольника BKP (рис. 209) на глаз.

а)



б)



в)

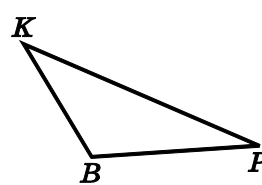


Рис. 209

2. В треугольнике ABC (рис. 210) постройте медиану, биссектрису и высоту, исходящие из вершины B . Сравните длины этих отрезков.

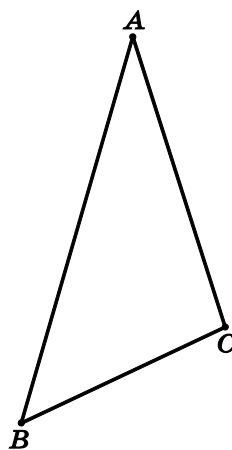


Рис. 210

3. Нарисуйте произвольный треугольник MNP . Постройте в нём две биссектрисы: MM_1 и PP_1 . Измерьте отрезки, на которые биссектрисы разбивают стороны. Измерьте стороны треугольника. Вычислите отношения $\frac{M_1N}{M_1P}$, $\frac{MN}{MP}$. Сделайте предположение о свойстве биссектрис треугольника. Проверьте это предположение для второй биссектрисы.

Самостоятельная работа № 24 (к п. 5.1).

Равнобедренный треугольник

Вариант 1

1. Начертите тупой угол A . Используя циркуль и линейку без делений, постройте равнобедренный треугольник ABC , в котором A — вершина.
2. Начертите острый угол D . Используя циркуль и линейку без делений, постройте равнобедренный треугольник KMD с основанием DM .
3. Начертите тупоугольный равнобедренный треугольник PTE : $PT = TE$. Проведите в нём две медианы: TM и PB . Какие из утверждений верны:
 - а) TM — высота треугольника PTE ;
 - б) PB — биссектриса треугольника PTE ?
4. Докажите, что на рисунке 211 треугольник ABC — равнобедренный.

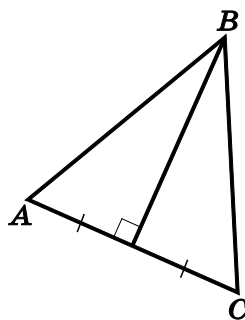


Рис. 211

5. По рисунку 212 определите градусные меры углов 2, 3 и 4, если $\angle 1 = 25^\circ$.

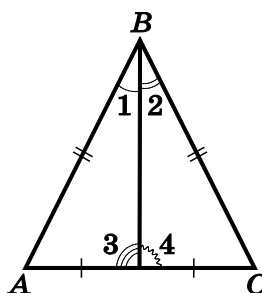


Рис. 212

6. По рисунку 213 определите градусную меру угла 1, если $\angle 2 = 110^\circ$.

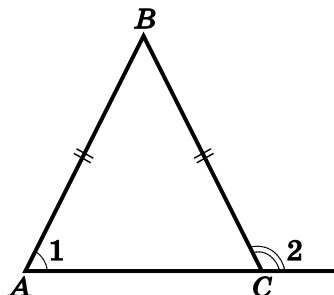


Рис. 213

Вариант 2

- Начертите острый угол B . Используя циркуль и линейку без делений, постройте равнобедренный треугольник ABC , в котором B — вершина.
- Начертите тупой угол D . Используя циркуль и линейку без делений, постройте равнобедренный треугольник KMD с основанием DK .
- Начертите тупоугольный равнобедренный треугольник MNK : $MN = NK$. Проведите в нём две медианы: MA и NB . Какие из утверждений верны:
 - MA — высота треугольника MNK ;
 - NB — биссектриса треугольника MNK ?
- Докажите, что на рисунке 214 треугольник ABC — равнобедренный.

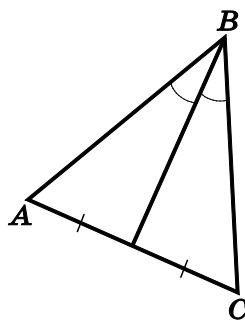


Рис. 214

5. По рисунку 215 определите градусные меры углов 2, 3 и 4, если $\angle 1 = 33^\circ$.

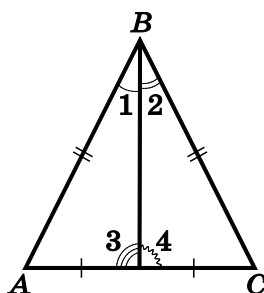


Рис. 215

6. По рисунку 216 определите градусную меру угла 2, если $\angle 1 = 55^\circ$.

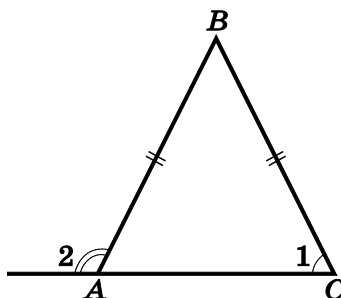


Рис. 216

Вариант 3

- В треугольнике MKP $MK = KP \neq MP$. Проведены медианы KA и ME . Напишите, являются утверждения истинными или ложными, ответы обоснуйте.
 - KA является биссектрисой треугольника MKP ;
 - ME может являться высотой треугольника MKP , в зависимости от длины MP ;
 - из треугольников MKA и MEP ровно один является прямоугольным, независимо от длин сторон треугольника MKP ;

г) из треугольников PKA и MEK ровно один является прямоугольным, независимо от длин сторон треугольника MKP .

2. На рисунке 217 изображена пирамида $ABCS$. $\angle 1 = 113^\circ = \angle 2$, $\angle 3 = \angle SAC = 67^\circ$, $\angle ASC = \angle BSA$. Найдите на рисунке равные треугольники и докажите их равенство.

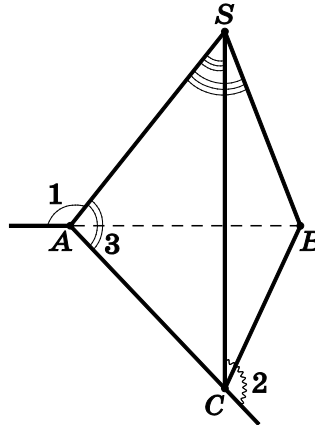


Рис. 217

3. Начертите острый угол E . Используя циркуль и линейку без делений, постройте равнобедренный треугольник AEC так, чтобы данный угол E являлся внешним для этого треугольника.
4. Определите величины углов 1, 2 и 4, если угол 3 равен 56° (рис. 218).

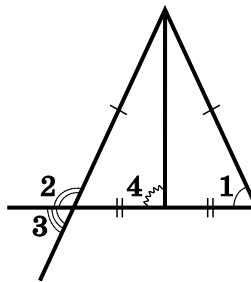


Рис. 218

Вариант 4

1. В треугольнике DEF $DE = EF \neq FD$. Проведены биссектрисы EA и FG . Запишите, являются утверждения истинными или ложными, ответы обоснуйте.
- а) FG может являться медианой треугольника DEF , в зависимости от длины FD ;
- б) EA является высотой треугольника DEF ;

- в) из треугольников FEA и FGE ровно один является прямоугольным, независимо от длин сторон треугольника DEF ;
- г) из треугольников DEA и FGD ровно один является прямоугольным, независимо от длин сторон треугольника DEF .
2. На рисунке 219 изображена пирамида $HEGF$. $\angle 1 = 107^\circ = \angle 2$, $\angle 3 = \angle HEF = 73^\circ$, $\angle EHG = \angle FHE$. Найдите на рисунке равные треугольники и докажите их равенство.

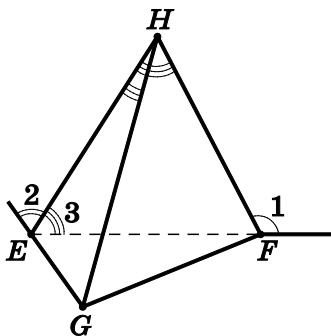


Рис. 219

3. Начертите тупой угол K . Используя циркуль и линейку без делений, постройте тупоугольный равнобедренный треугольник AKC так, чтобы данный угол K являлся внешним для этого треугольника.
4. Определите величины углов 2, 3 и 4, если угол 1 равен 63° (рис. 220).

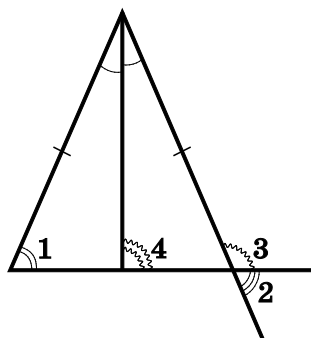


Рис. 220

Самостоятельная работа № 25 (к п. 5.1).

Равнобедренный треугольник

Вариант 1

1. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 221—223).

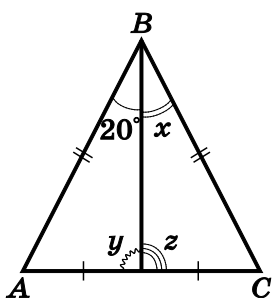


Рис. 221

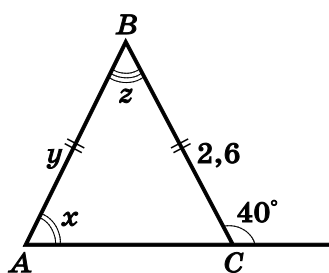


Рис. 222

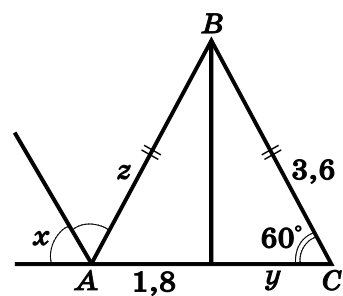


Рис. 223

2. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 224—226).

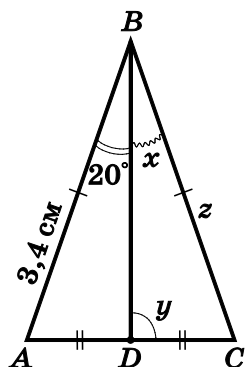


Рис. 224

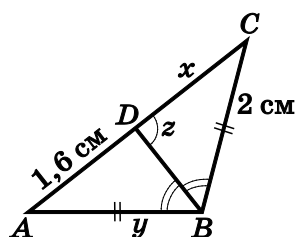


Рис. 225

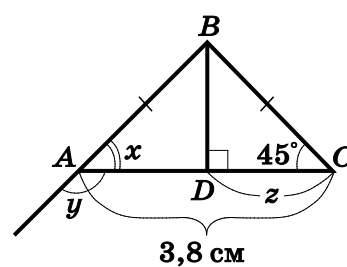


Рис. 226

Вариант 2

1. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 227—229).

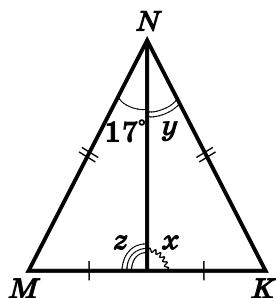


Рис. 227

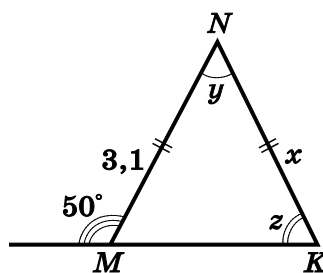


Рис. 228

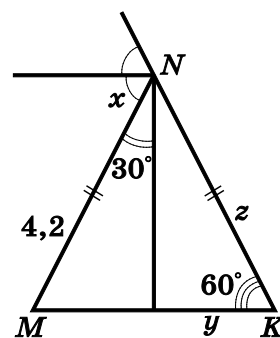


Рис. 229

2. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 230—232).

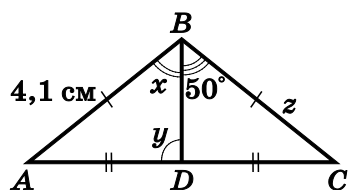


Рис. 230

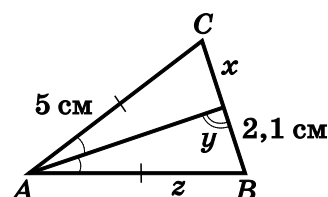


Рис. 231

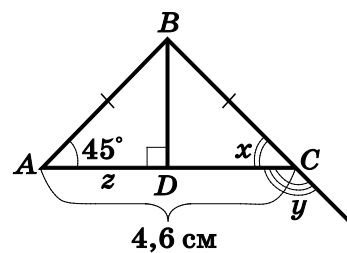


Рис. 232

Вариант 3

1. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 233—235).

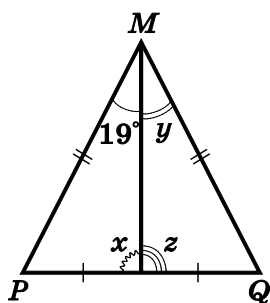


Рис. 233

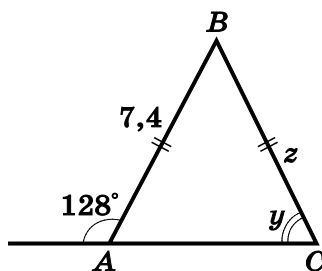


Рис. 234

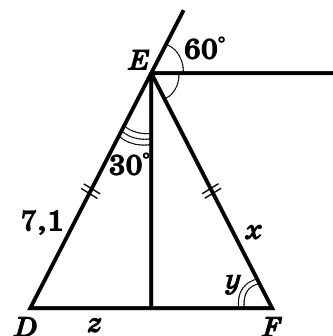


Рис. 235

2. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 236—238).

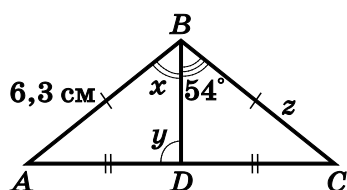


Рис. 236

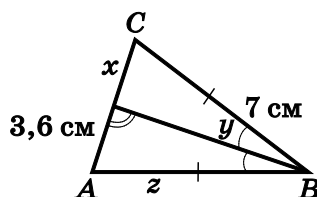


Рис. 237

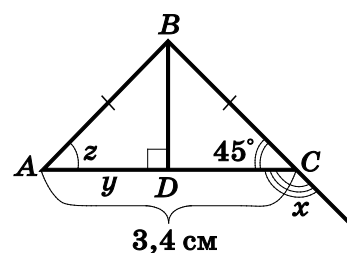


Рис. 238

Вариант 4

1. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 239—241).

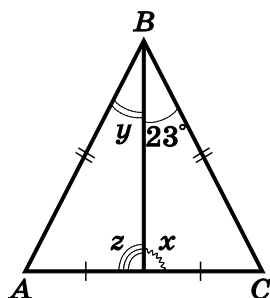


Рис. 239

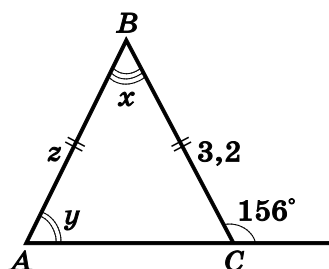


Рис. 240

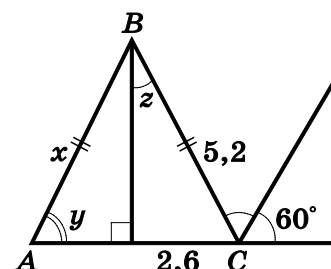


Рис. 241

2. Найдите значения x , y , z по данным каждого рисунка (рис. 242—244).

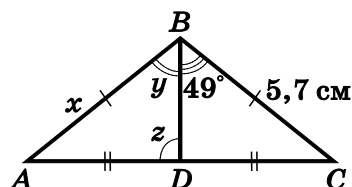


Рис. 242

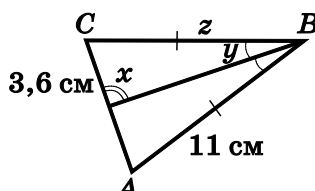


Рис. 243

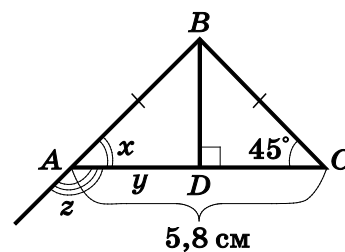


Рис. 244

Самостоятельная работа № 26 (к п. 5.1).

Равнобедренный треугольник

Вариант 1

1. Восстановите равнобедренный треугольник ABC , если от него остались:

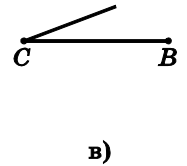


Рис. 245

- а) боковая сторона и часть основания (рис. 245, а);
 б) боковая сторона и часть высоты к основанию (рис. 245, б);
 в) основание и часть высоты к боковой стороне (рис. 245, в).
2. На рисунке 246 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — изображение куба. Точки M и N — середины рёбер $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$. Запишите все изображённые на рисунке равнобедренные треугольники.

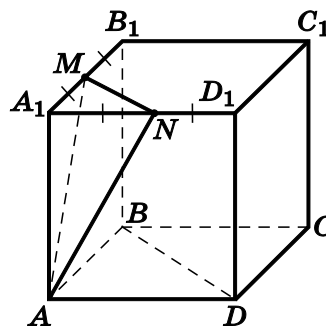


Рис. 246

3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Угол A составляет 0,25 от угла B . Во сколько раз угол B больше угла C ? Объясните свой ответ.

Вариант 2

1. Восстановите равнобедренный треугольник MNK , если от него остались:

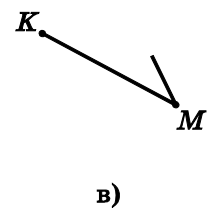


Рис. 247

- а) боковая сторона и часть основания (рис. 247, а);
 б) боковая сторона и часть высоты к основанию (рис. 247, б);
 в) основание и часть высоты к боковой стороне (рис. 247, в).
2. На рисунке 248 $PABCD$ — изображение пирамиды, в основании которой квадрат $ABCD$, а боковые рёбра равны: $PA = PB = PC = PD$. Точки M и N — середины рёбер AD и DC . Запишите все изображённые на рисунке равнобедренные треугольники.

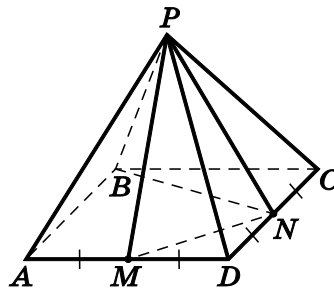


Рис. 248

3. В треугольнике DBP стороны DP и PB равны. Угол P в три раза больше угла B . Какую часть от угла P составляет угол D ? Объясните свой ответ.

Вариант 3

1. Восстановите равнобедренный треугольник MPQ , если от него остались:

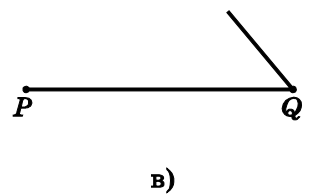
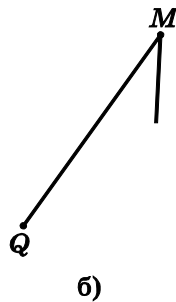
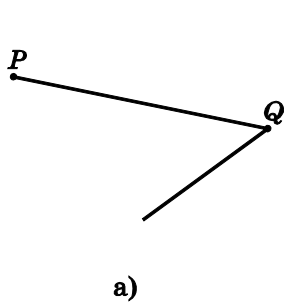


Рис. 249

- а) основание и часть боковой стороны (рис. 249, а);
 б) боковая сторона и часть медианы к основанию (рис. 249, б);
 в) основание и часть высоты к боковой стороне (рис. 249, в).
2. На рисунке 250 $PABCD$ — изображение пирамиды, в основании которой квадрат $ABCD$, а боковые рёбра равны: $PA = PB = PC = PD$. Точки E и Q — середины рёбер AD и DC . Запишите все изображённые на рисунке равнобедренные треугольники.

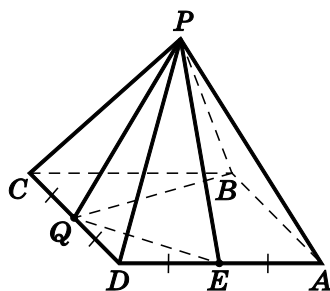


Рис. 250

3. В треугольнике EQP стороны EP и PQ равны. Угол P в 3,5 раза больше угла Q . Какую часть от угла P составляет угол E ? Объясните свой ответ.

Вариант 4

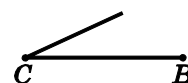
1. Восстановите равнобедренный треугольник ABC , если от него остались:



а)



б)



в)

Рис. 251

- а) часть боковой стороны и основание (рис. 251, а);
 б) боковая сторона и часть биссектрисы, проведённой из вершины (рис. 251, б);
 в) основание и часть высоты к боковой стороне (рис. 251, в).
2. На рисунке 252 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — изображение куба. Точки M и N — середины рёбер $C_1 D_1$ и $A_1 D_1$. Запишите все изображённые на рисунке равнобедренные треугольники.

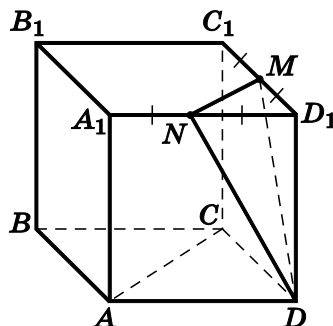


Рис. 252

3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Угол A составляет 0,75 от угла B . Во сколько раз угол B больше угла C ? Объясните свой ответ.

Самостоятельная работа № 27 (к п. 5.2).

Серединный перпендикуляр к отрезку

Вариант 1

1. Используя данные рисунка 253, при помощи только линейки изобразите два отрезка, длины которых a и b .

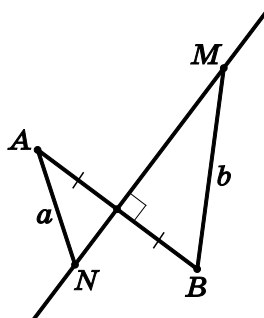
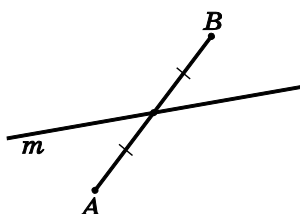


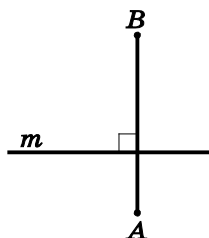
Рис. 253

2. Цветным карандашом на рисунках 254 а, б, в выделите точки прямой m , равноудалённые от концов отрезка AB , или укажите, что их нет.

а)



б)



в)

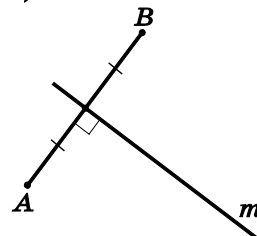


Рис. 254

3. Докажите, что точки A , O и B лежат на одной прямой (рис. 255).

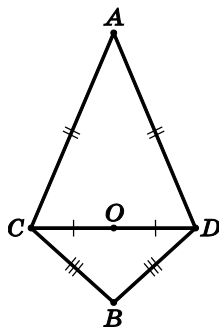


Рис. 255

4. На рисунке 256 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В плоскости грани $DD_1 C_1 C$ изобразите прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку DC_1 .

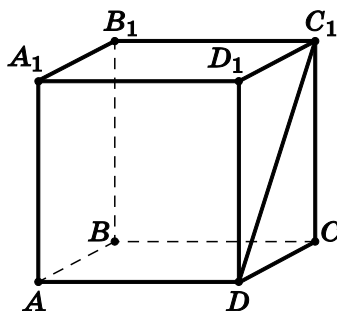


Рис. 256

Вариант 2

1. Используя данные рисунка 257, при помощи только линейки изобразите два отрезка, длины которых a и b .

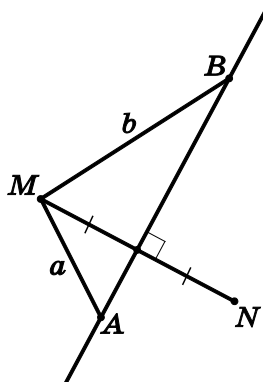


Рис. 257

2. Цветным карандашом на рисунках 258 а, б, в выделите точки прямой m , равноудалённые от концов отрезка AB , или укажите, что их нет.

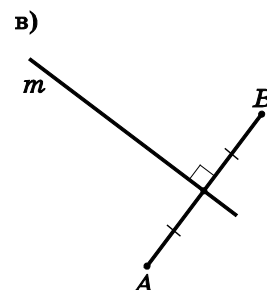
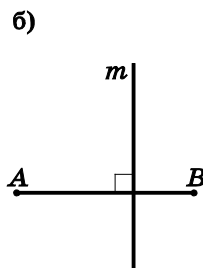
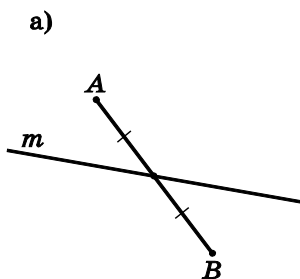


Рис. 258

3. Докажите, что точки M , O и N лежат на одной прямой (рис. 259).

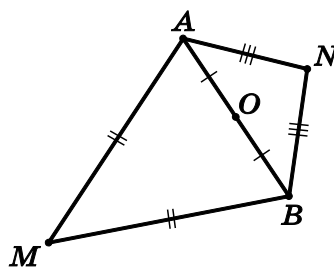


Рис. 259

4. На рисунке 260 изображена пирамида $ABCD$. В плоскости грани PAB изобразите прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку AB .

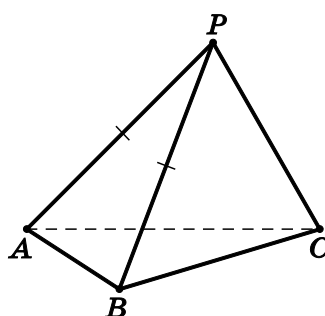


Рис. 260

Вариант 3

1. Используя данные рисунка 261, при помощи только линейки изобразите два отрезка, длины которых m и n .

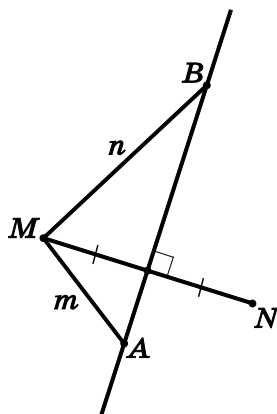


Рис. 261

2. Цветным карандашом на рисунках 262 а, б, в, г выделите точки прямой m , равноудалённые от концов отрезка AB , или укажите, что их нет.

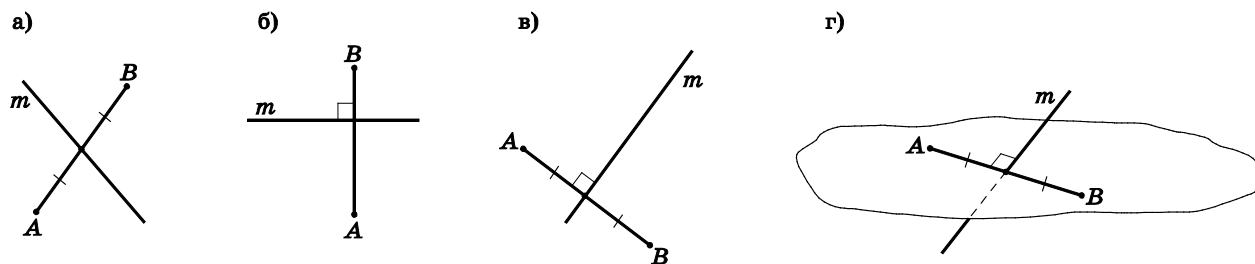


Рис. 262

3. Докажите, что точки C , O и D лежат на одной прямой (рис. 263).

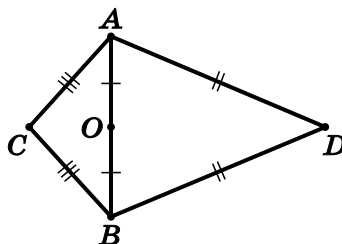


Рис. 263

4. На рисунке 264 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. В плоскости грани $AA_1 B_1 B$ изобразите прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку AB_1 .

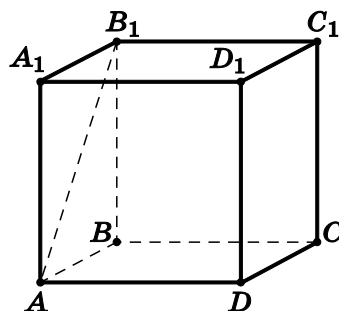


Рис. 264

Вариант 4

1. Используя данные рисунка 265, при помощи только линейки изобразите два отрезка, длины которых p и q .

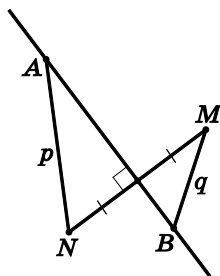


Рис. 265

2. Цветным карандашом на рисунках 266 а, б, в, г выделите точки прямой m , равноудалённые от концов отрезка AB , или укажите, что их нет.

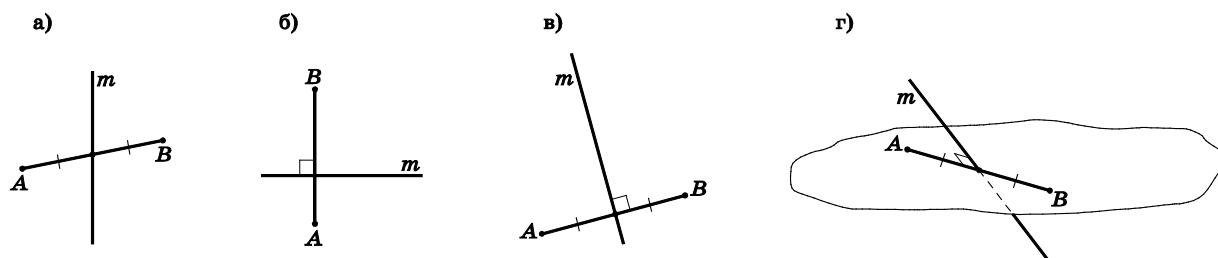


Рис. 266

3. Докажите, что точки C , O и B лежат на одной прямой (рис. 267).

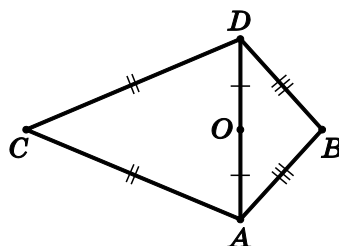


Рис. 267

4. В плоскости грани PCB тетраэдра $ABCD$ (рис. 268) изобразите прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку CB .

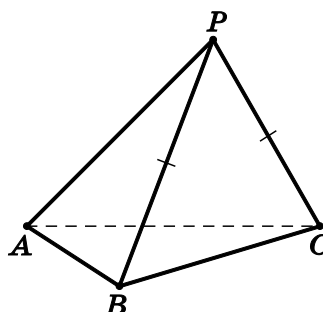


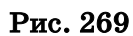
Рис. 268

Самостоятельная работа № 28 (к п. 5.4).

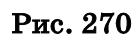
Сравнение сторон и углов треугольника

Вариант 1

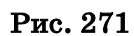
1. На рисунке 269 $\angle 1 = \angle 2$. Используя данный рисунок, изобразите равнобедренный треугольник.



a)



a)



Вариант 2

1. На рисунке 272 $\angle 1 = \angle 2$. Используя данный рисунок, изобразите равнобедренный треугольник.

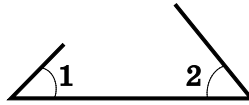


Рис. 272

2. Сравните стороны MK и PK треугольника MPK по данным чертежа (рис. 273). Ответ обоснуйте.

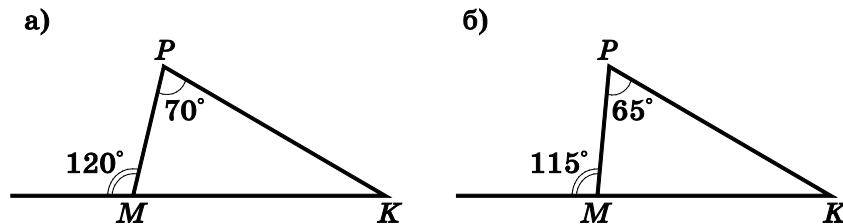


Рис. 273

3. Докажите, что на каждом рисунке 274 а—д равны стороны AB и BC .

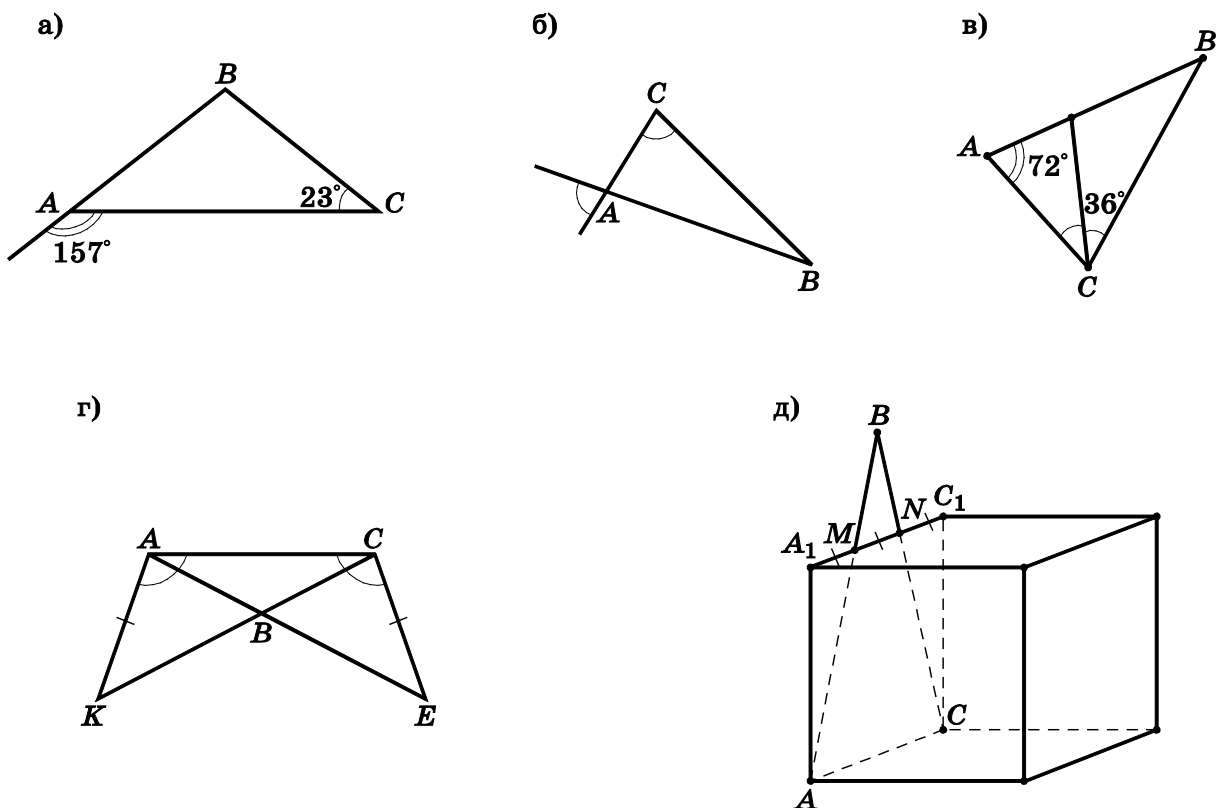


Рис. 274

Вариант 3

1. На рисунке 275 $\angle 1 = \angle 2$. Используя данный рисунок, изобразите равнобедренный треугольник.

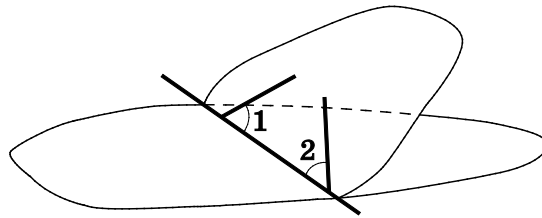


Рис. 275

2. Докажите, что на каждом рисунке 276 а—д равны стороны AB и BC треугольника ABC .

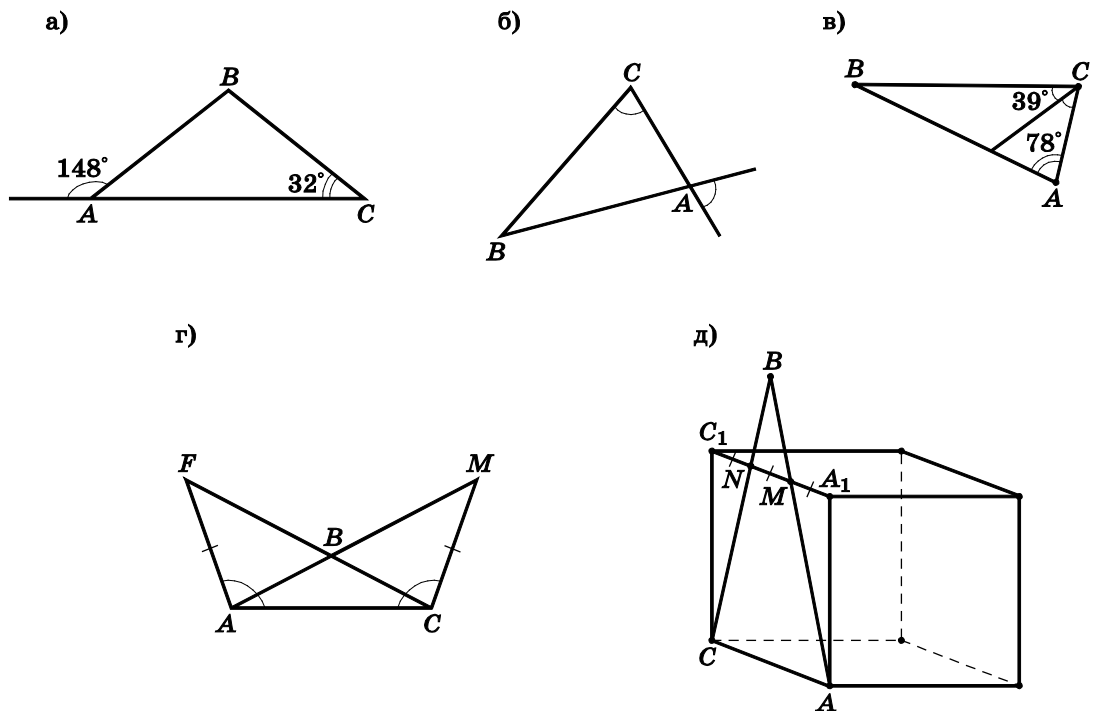


Рис. 276

3. Сравните AO и TO треугольника ATO по данным чертежа (рис. 277). Ответ обоснуйте.

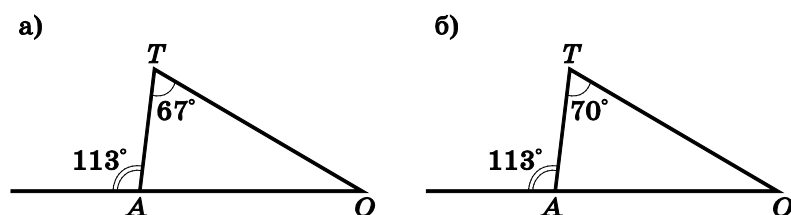


Рис. 277

Вариант 4

1. На рисунке 278 $\angle 1 = \angle 2$. Используя данный рисунок, изобразите равнобедренный треугольник.

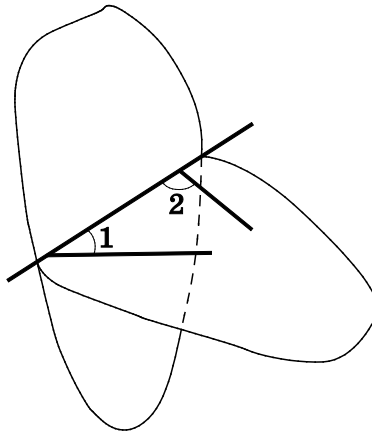
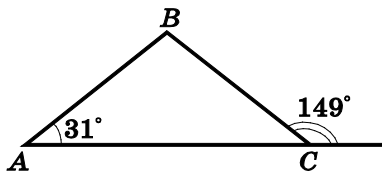


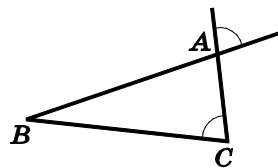
Рис. 278

2. Докажите, что на каждом рисунке 279 а—д равны стороны AB и BC треугольника ABC .

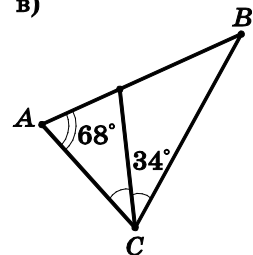
а)



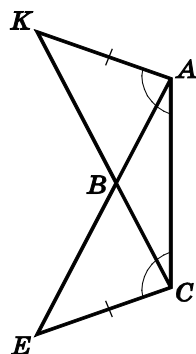
б)



в)



г)



д)

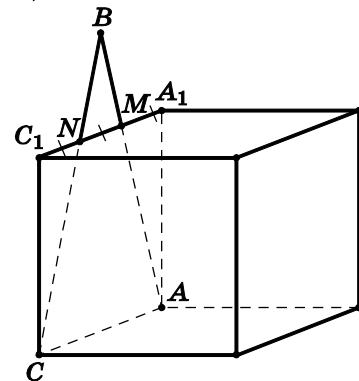


Рис. 279

3. Сравните AB и BC треугольника MPK по данным чертежа (рис. 280). Ответ обоснуйте.

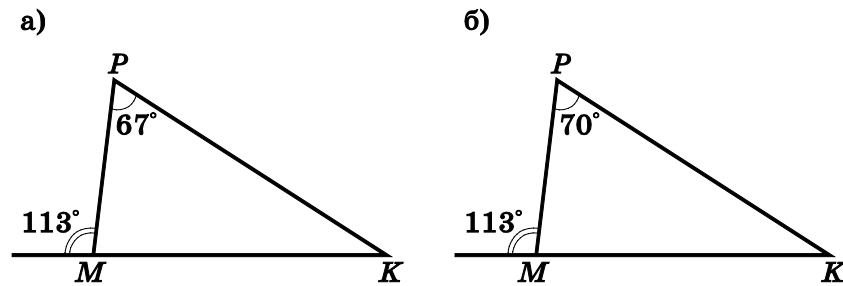


Рис. 280

Самостоятельная работа № 29 (к п. 6.2).

Неравенство треугольника

Вариант 1

1. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 2,4 см, другая составляет $\frac{5}{8}$ от первой, а третья в два раза больше второй? Если да, то начертите такой треугольник.
2. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 3,2 см, отношение двух других составляет 2 : 5, а периметр треугольника равен 11,6 см? Если да, то начертите такой треугольник.

Вариант 2

1. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 3,6 см, другая составляет $\frac{5}{12}$ от первой, а третья в два раза больше второй? Если да, то начертите такой треугольник.
2. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 3,7 см, отношение двух других составляет 4 : 7, а периметр треугольника равен 15,8 см? Если да, то начертите такой треугольник.

Вариант 3

1. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 5 см, длина другой в сантиметрах является одним из корней уравнения $x \cdot (5x - 19)(9x + 27) = 0$, а длина третьей стороны составляет половину длины второй? Если да, то начертите такой треугольник.

2. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 6,4 см, отношение двух других равно отношению корней уравнений $5x - (11 - 3x) = 6 \cdot (x - 1)$ и $-4x = -50$, а периметр треугольника равен 23,2 см? Если да, то начертите такой треугольник.

Вариант 4

1. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 10 см, длина другой в сантиметрах является одним из корней уравнения $x \cdot (5x - 27)(9x + 18) = 0$, а длина третьей стороны составляет половину длины второй? Если да, то начертите такой треугольник.
2. Существует ли треугольник, у которого одна сторона 7,6 см, отношение двух других равно отношению корней уравнений $7 \cdot (1 - x) = 4x - (11 + 3x)$ и $-4x = -6$, а периметр треугольника равен 18,1 см? Если да, то начертите такой треугольник.

Самостоятельная работа № 30 (к п. 7.1).

Признаки параллельности прямых

Вариант 1

1. Посмотрите на рисунки 281 и 282. Для каждого рисунка запишите:

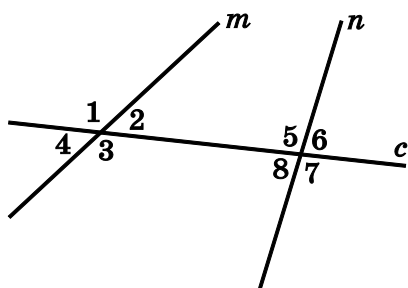


Рис. 281

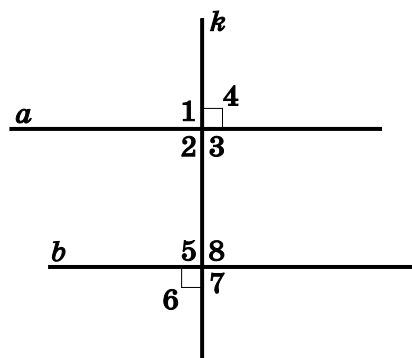


Рис. 282

- а) пару вертикальных углов;
б) пару внутренних накрест лежащих углов;
в) пару соответственных углов.
2. Верны ли высказывания:
а) если углы вертикальные, то они равны;

б) если углы внутренние накрест лежащие, то они равны;

в) если углы соответственные, то они равны?

Если высказывания неверны, то подтвердите это примером из рисунков 281 и 282.

Вариант 2

1. Посмотрите на рисунки 283 и 284. Для каждого рисунка запишите:

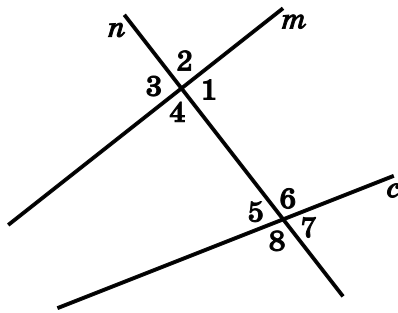


Рис. 283

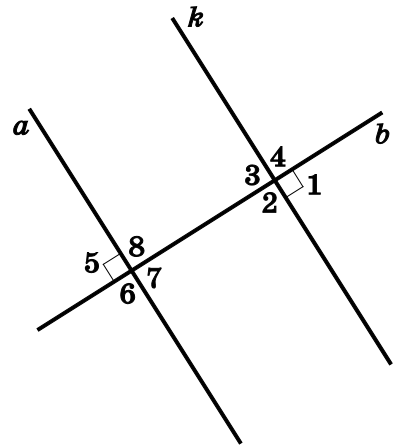


Рис. 284

а) пару смежных углов;

б) пару внутренних односторонних углов;

в) пару соответственных углов.

2. Верны ли высказывания:

а) если углы смежные, то в сумме они составляют развёрнутый угол;

б) если углы внутренние односторонние, то в сумме они составляют развёрнутый угол;

в) если углы соответственные, то они не равны?

Если высказывания неверны, то подтвердите это примером из рисунков 283 и 284.

Вариант 3

Выполните следующие задания, глядя на рисунок 285.

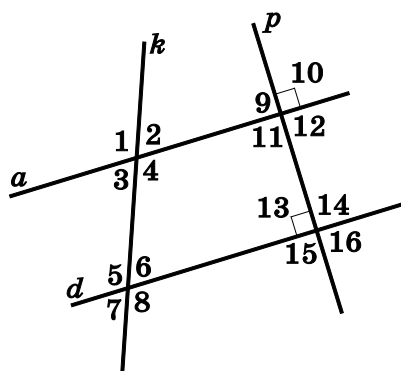


Рис. 285

1. Запишите пару внутренних односторонних углов при прямых k и p и секущей a .
2. Запишите пару соответственных углов при прямых a и d и секущей p .
3. Запишите, какой угол является внутренним односторонним с углом 13 при прямых k и p и секущей d .
4. Запишите все углы, являющиеся по отношению к углу 6 внутренними накрест лежащими, и укажите, при каких прямых и каких секущих это выполнено.
5. Про каждое из предложенных ниже высказываний напишите, является ли оно всегда истинным, всегда ложным или может быть истинным или ложным при тех или иных обстоятельствах. Укажите номера углов на рисунке, иллюстрирующие ваше мнение, если такие углы есть.
 - а) При пересечении двух прямых образуются две различные пары равных углов.
 - б) Вертикальные углы равны между собой.
 - в) Сумма внутренних односторонних углов равна развёрнутому углу.
 - г) Углы, вертикальные внутренним односторонним, не равны между собой.
 - д) Среди пар соответственных углов при одной секущей всегда найдётся пара острых углов.

Вариант 4

Выполните следующие задания, глядя на рисунок 286.

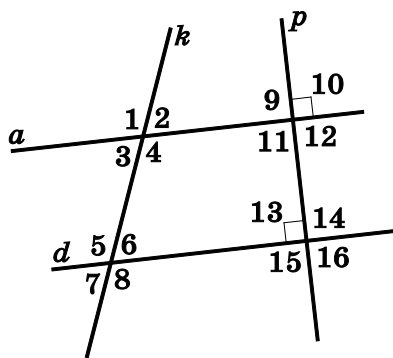


Рис. 286

1. Укажите пару внутренних односторонних углов при прямых a и d и секущей p .
2. Укажите пару соответственных углов при прямых k и p и секущей a .
3. Запишите, какой угол является внутренним односторонним с углом 6 при прямых a и d и секущей k .
4. Запишите все углы, являющиеся по отношению к углу 11 внутренними накрест лежащими, и укажите, при каких прямых и каких секущих это выполнено.
5. Про каждое из предложенных ниже высказываний напишите, является ли оно всегда истинным, всегда ложным или может быть истинным или ложным при тех или иных обстоятельствах. Укажите номера углов на рисунке, иллюстрирующие ваше мнение, если такие углы есть.
 - а) Сумма смежных углов равна развёрнутому углу.
 - б) При пересечении двух прямых образуются шесть различных пар равных углов.
 - в) Сумма углов, вертикальных внутренним односторонним углам, равна развёрнутому углу.
 - г) Внутренние односторонние углы равны между собой.
 - д) Среди пар соответственных углов при одной секущей всегда найдётся пара тупых углов.

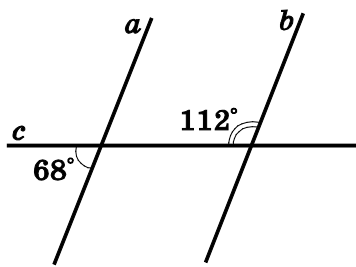
Самостоятельная работа № 31 (к п. 7.1).

Признаки параллельности прямых

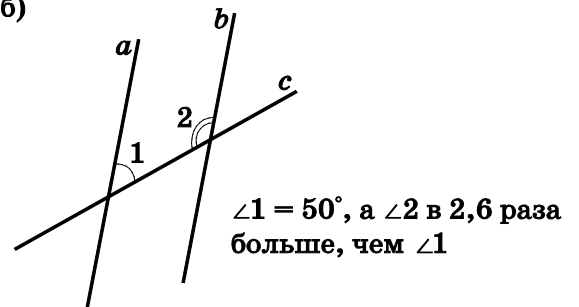
Вариант 1

1. Докажите, что на каждом из рисунков 287 а—в прямые a и b параллельны.

а)



б)



в)

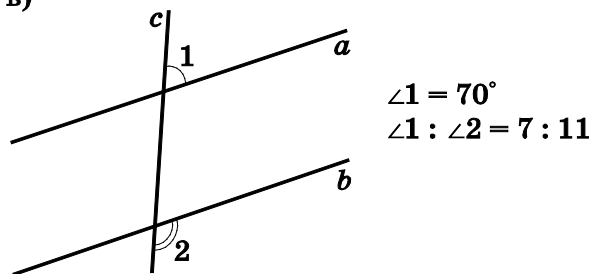


Рис. 287

2. Докажите, используя данные рисунка 288, что прямые AC и BD параллельны.

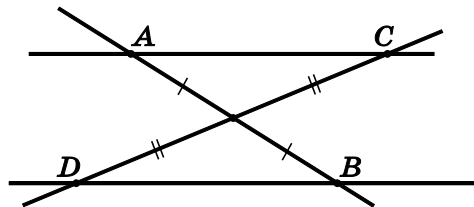


Рис. 288

Вариант 2

1. Докажите, что на каждом из рисунков 289 а—в прямые a и b параллельны.

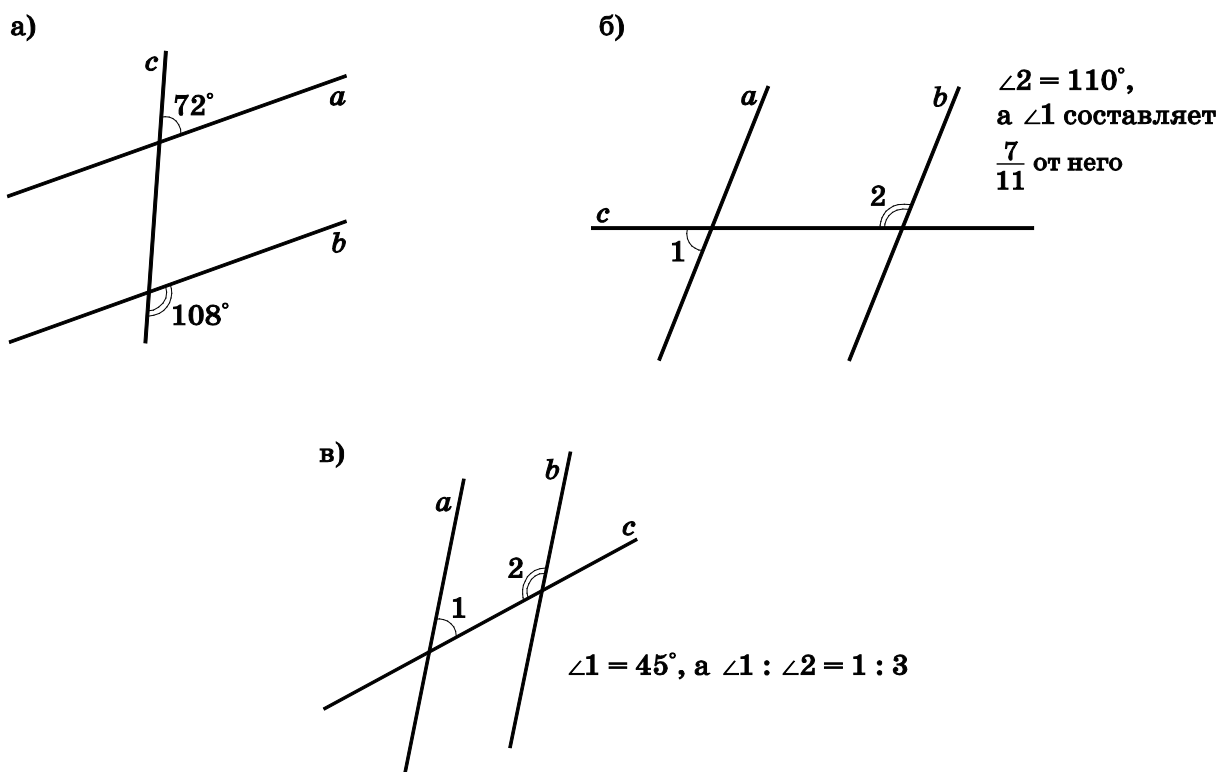


Рис. 289

2. Докажите, используя данные рисунка 290, что прямые MP и EK параллельны.

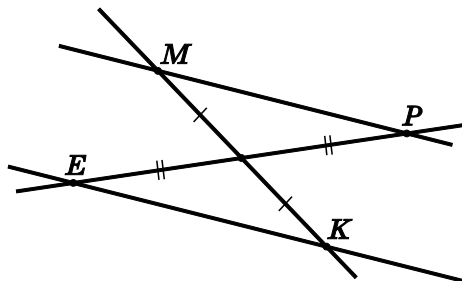


Рис. 290

Вариант 3

1. Докажите, используя данные рисунка 291, что прямые AB и CD параллельны.

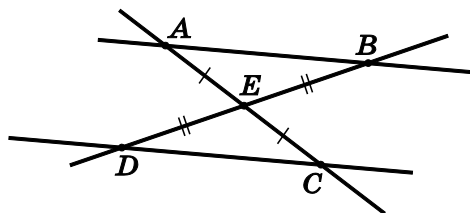
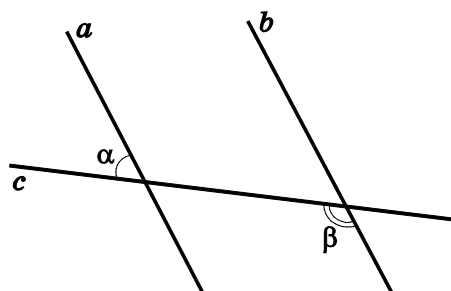


Рис. 291

2. Проверьте для каждого из рисунков 292 а, б, параллельны ли прямые a и b , если:

а)



б)

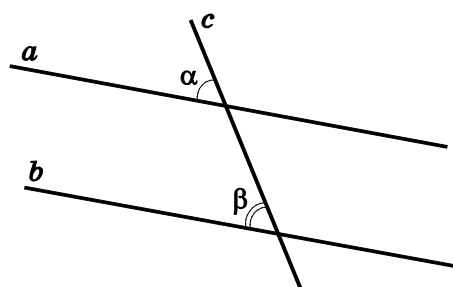


Рис. 292

- а) угол α составляет $\frac{2}{3}$ тупого угла β , а градусная мера угла α — одно из решений уравнения $(x - 72)(x - 30) = 0$;
- б) градусная мера угла α — одно из решений уравнения $(x + 29)(x - 45) = 0$, а градусная мера угла β — одно из решений уравнения $|50 - 2x| = 3x - 95$.

Вариант 4

1. Докажите, используя данные рисунка 293, что прямые DF и NS параллельны.

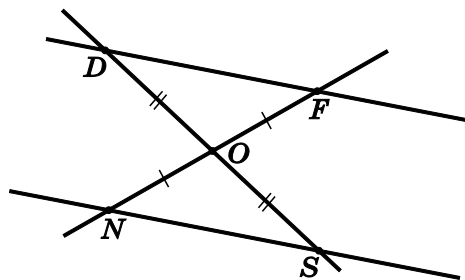


Рис. 293

2. Проверьте для каждого из рисунков 294 а, б, параллельны ли прямые m и q , если:

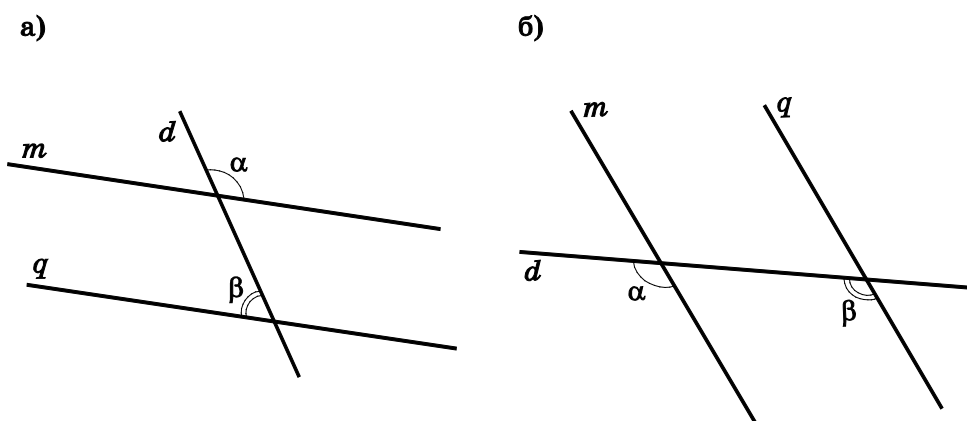


Рис. 294

- а) угол α составляет $\frac{7}{5}$ острого угла β , а градусная мера угла α — одно из решений уравнения $(x - 147)(x - 105) = 0$;
- б) градусная мера угла α — одно из решений уравнения $(x - 110)(x + 120) = 0$, а градусная мера угла β — одно из решений уравнения $|3x - 530| = x + 90$.

Самостоятельная работа № 32 (к п. 7.4).

Свойства углов, образованных параллельными прямыми и секущей

Вариант 1

1. Найдите величины углов треугольника ABC (рис. 295), если прямая a параллельна BC .

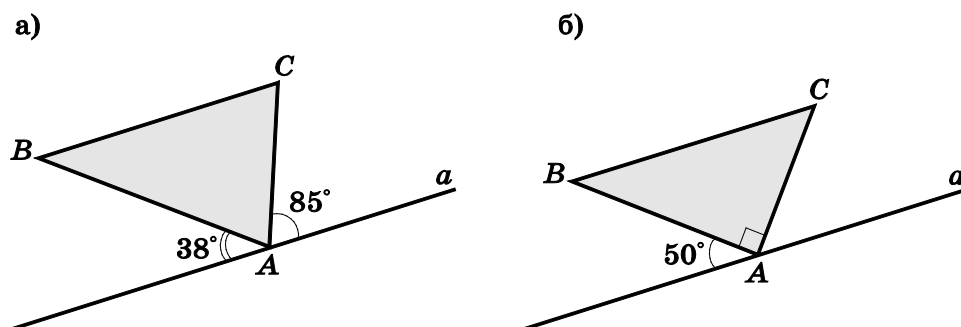


Рис. 295

2. Найдите величину угла x , используя данные рисунка 296.

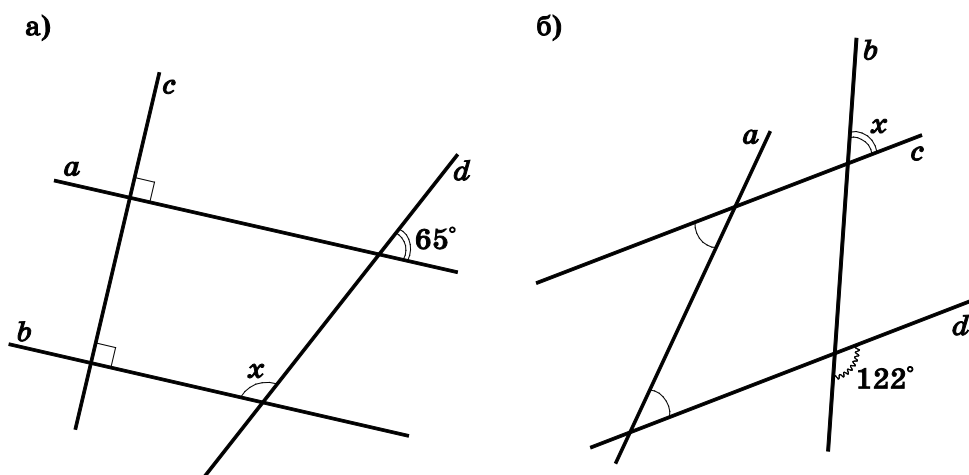


Рис. 296

Вариант 2

1. Найдите величины углов треугольника MPK , если прямая a параллельна PK (рис. 297).

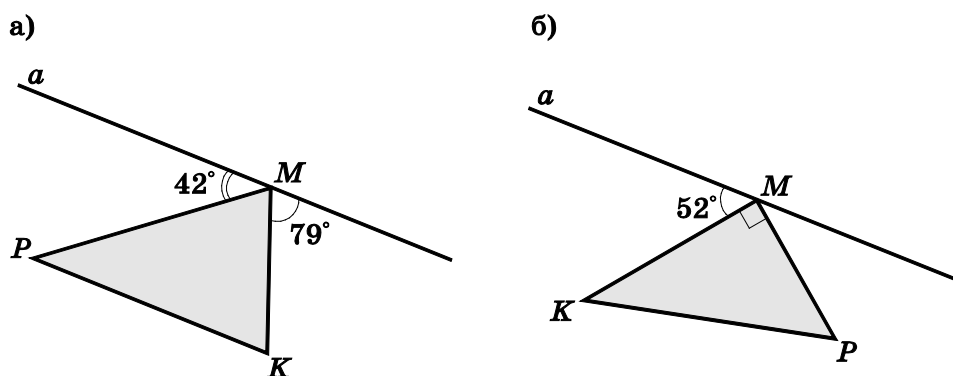


Рис. 297

2. Найдите величину угла x , используя данные рисунка 298.

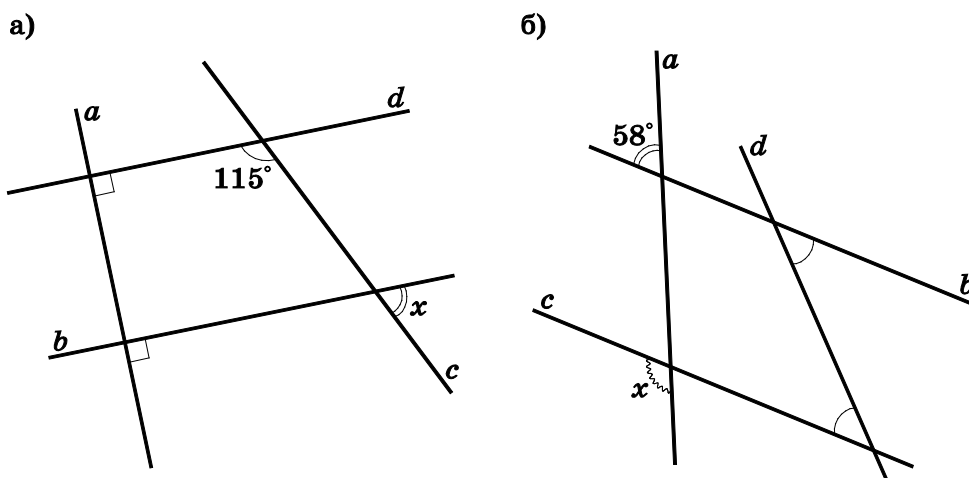
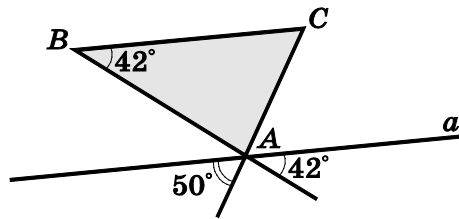


Рис. 298

Вариант 3

1. Найдите величины углов треугольника ABC по данным рисунков 299 а, б.

а)



б)

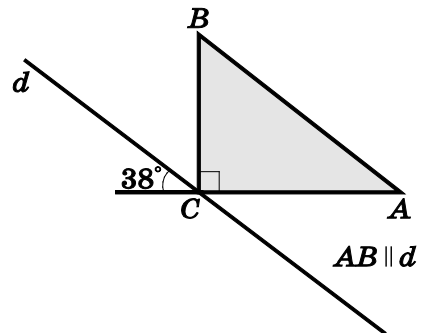
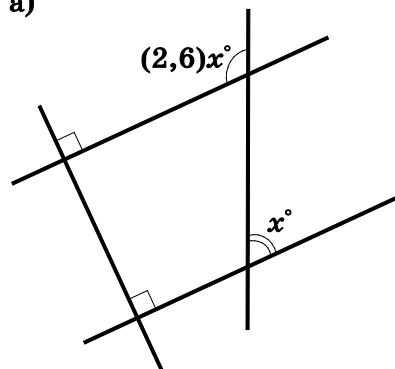


Рис. 299

2. Найдите величину угла x , используя данные рисунков 300 а, б.

а)



б)

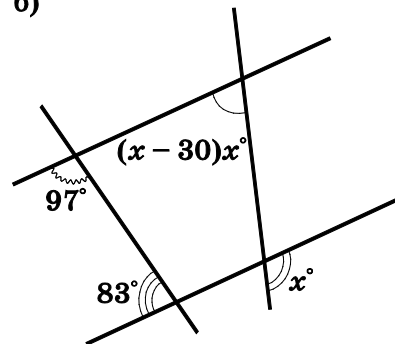
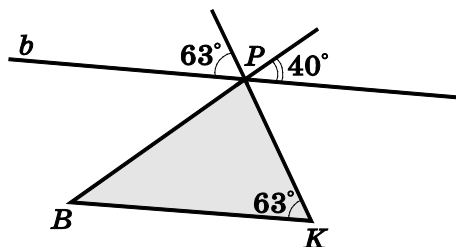


Рис. 300

Вариант 4

1. Найдите величины углов треугольника BPK по данным рисунков 301 а, б.

а)



б)

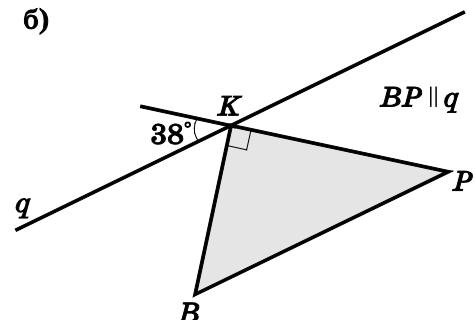


Рис. 301

2. Найдите величину угла x , используя данные рисунков 302 а, б.

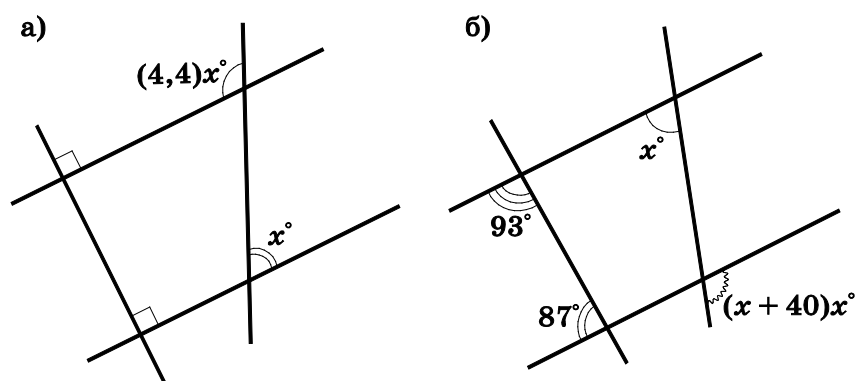


Рис. 302

Самостоятельная работа № 33 (к п. 7.5).

Построение прямоугольника. Свойства прямоугольника

Вариант 1

1. $ABCD$ — прямоугольник. По данным рисунка 303 найдите величину угла x .

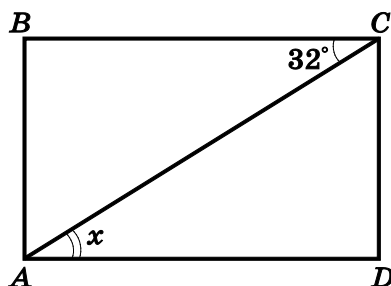


Рис. 303

2. $ABCD$ — прямоугольник, периметр которого равен 8,4 см. Найдите длины смежных сторон этого прямоугольника, если они относятся как 3 : 4.
3. $ABCD$ — прямоугольник. Найдите его периметр, если биссектриса угла A делит сторону BC на два отрезка, длины которых 1,8 см и 3,2 см.

Вариант 2

1. $ABCD$ — прямоугольник. По данным рисунка 304 найдите величину угла x .

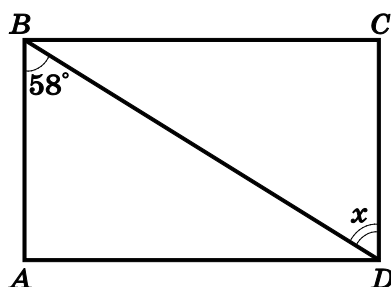


Рис. 304

2. $ABCD$ — прямоугольник, периметр которого равен 8,4 см. Найдите длины смежных сторон этого прямоугольника, если они относятся как 5 : 7.
3. $ABCD$ — прямоугольник. Найдите его периметр, если биссектриса угла C делит сторону AD на два отрезка, длины которых 3,4 см и 2,6 см.

Вариант 3

1. $ABCD$ — прямоугольник. По данным рисунка 305 найдите величины углов x , y , z . Что можно сказать о треугольнике AOD ?

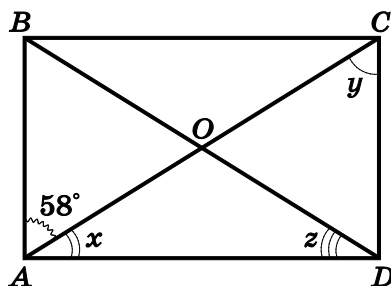


Рис. 305

2. $ABCD$ — прямоугольник, периметр которого равен 20 см. Найдите длины смежных сторон этого прямоугольника, если одна из них на 4 см длиннее другой.
3. $ABCD$ — прямоугольник. Найдите его периметр, если биссектрисы углов A и D делят сторону BC на три отрезка, длины двух из которых 5,3 см и 3,7 см.
4. Найдите периметр многоугольника $ACDEFGA$ (рис. 306), если $ACDK$ и $ABFG$ — прямоугольники, $EK = 2,3$ см, $CB = 3,1$ см.

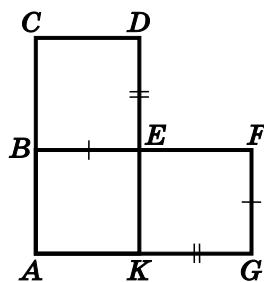


Рис. 306

Вариант 4

1. $ABCD$ — прямоугольник. По данным рисунка 307 найдите величины углов x , y , z . Что можно сказать о треугольнике COD ?

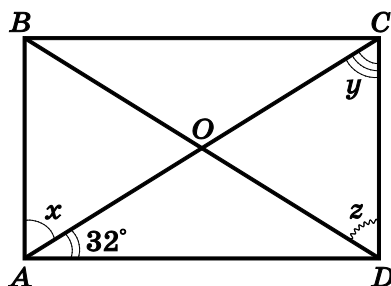


Рис. 307

2. $ABCD$ — прямоугольник, периметр которого равен 30 см. Найдите длины смежных сторон этого прямоугольника, если одна из них на 7 см короче другой.
3. $ABCD$ — прямоугольник. Найдите его периметр, если биссектрисы углов B и C делят сторону AD на три отрезка, длины двух из которых 4,2 см и 5,8 см.
4. Найдите периметр многоугольника $ACDEFGA$ (рис. 308), если $ACDK$ и $ABFG$ — прямоугольники, $BE = 3,4$ см, $KG = 4,2$ см.

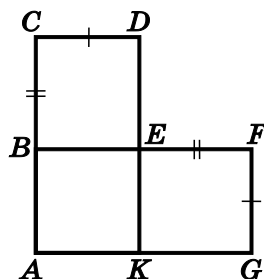


Рис. 308

Самостоятельная работа № 34 (к п. 8.1).

Сумма углов треугольника

Вариант 1

1. По данным каждого из рисунков 309 а—е найдите величины неизвестных углов.

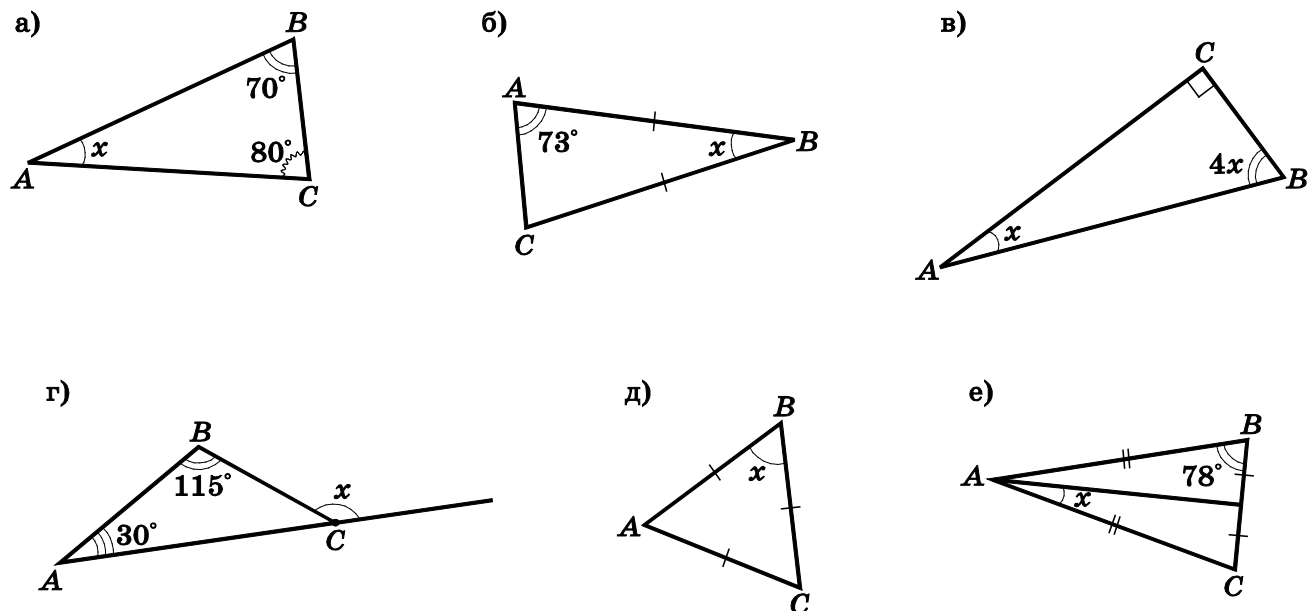


Рис. 309

2. На рисунке 310 изображена пирамида $PABC$. По данным рисунка найдите x .

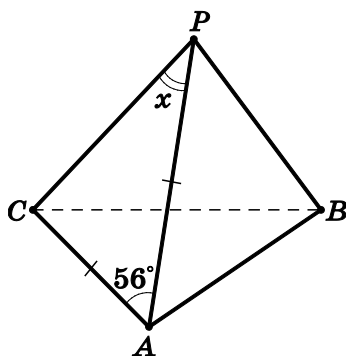
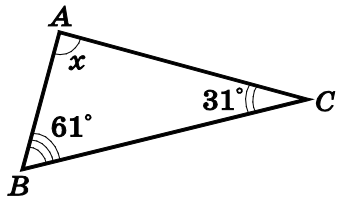


Рис. 310

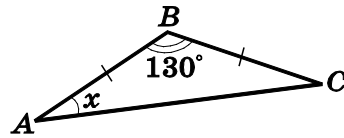
Вариант 2

1. По данным каждого из рисунков 311 а—е найдите величины неизвестных углов.

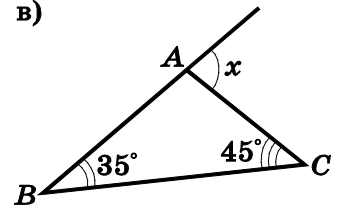
а)



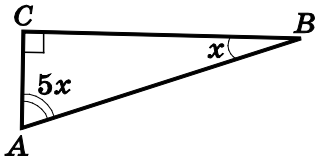
б)



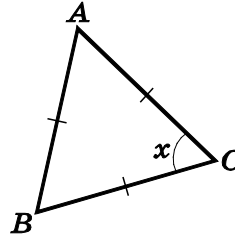
в)



г)



д)



е)

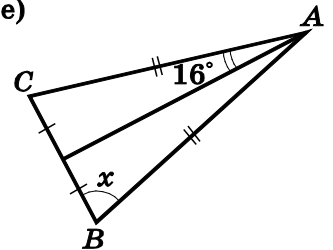


Рис. 311

2. На рисунке 312 изображена пирамида $PABC$. По данным рисунка найдите x .

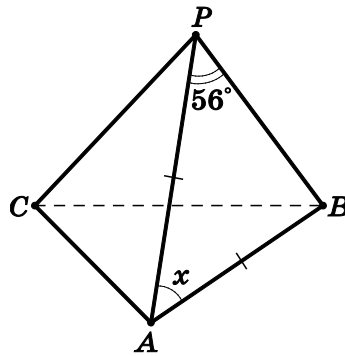
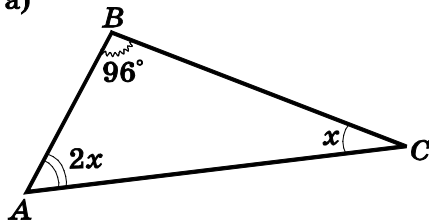


Рис. 312

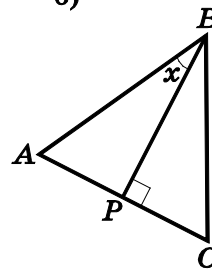
Вариант 3

1. По данным каждого из рисунков 313 а—в найдите величину неизвестного угла.

а)



б)



в)

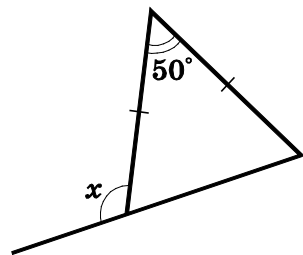


Рис. 313

2. На рисунке 314 изображена пирамида. Найдите величину x по данным рисунка.

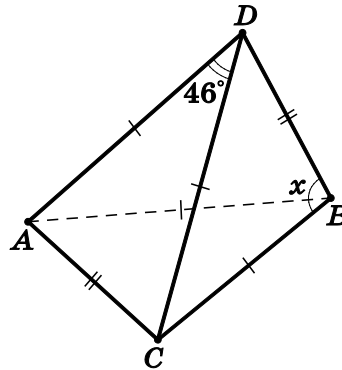
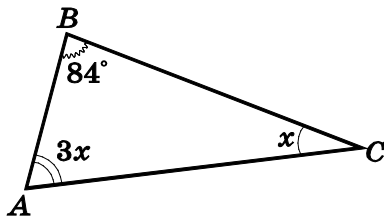


Рис. 314

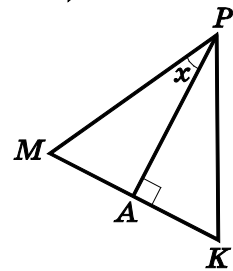
Вариант 4

1. По данным каждого из рисунков 315 а—в найдите величину неизвестного угла.

а)



б)



$$MP = PK = MK$$

в)

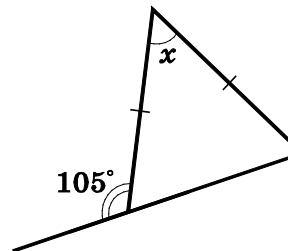


Рис. 315

2. На рисунке 316 изображена пирамида. Найдите величину x по данным рисунка.

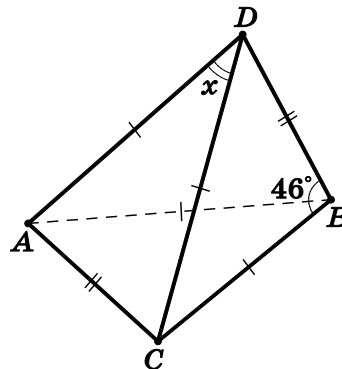


Рис. 316

Контрольная работа № 1.

Отрезки. Окружность и круг

Вариант 1

1. Дан отрезок AB . Его длина 12 см. На отрезке AB взята точка K . Вычислите KB , если:
а) $KA = 1$ см; б) $KB = 2KA$; в) расстояние от точки K до точки A на 1 см больше расстояния от точки K до точки B ; г) расстояние от точки K до точки C , середины отрезка AB , равно 1 см.
2. Постройте на одной прямой два отрезка AB и KM , длиной 6 см каждый, так, чтобы расстояние между их серединами было равно 1 см. Вычислите длину их пересечения и объединения.
3. Постройте окружность с центром в точке M радиусом 3 см. Проведите диаметр AB и хорду AC . Затем проведите радиус MC .
а) Выпишите равные отрезки, имеющиеся на чертеже.
б) Вычислите длину отрезка AB .
в) Закрасьте сектор, не являющийся сегментом.
г) Закрасьте сегмент, являющийся сектором.
4. Верно ли утверждение: каждая точка ребра куба принадлежит двум его граням?

Вариант 2

1. Дан отрезок MP . Его длина 6 см. На отрезке MP взята точка K . Вычислите KM , если:
а) $KP = 1$ см; б) $KP = 2KM$; в) расстояние от точки K до точки M на 2 см больше расстояния от точки K до точки P ; г) расстояние от точки K до точки C , середины отрезка MP , равно 1 см.
2. Постройте на одной прямой два отрезка BC и MP , длиной 8 см каждый, так, чтобы расстояние между их серединами было равно 2 см. Вычислите длину их пересечения и объединения.
3. Постройте окружность с центром в точке O радиусом 2,5 см. Проведите диаметр AB и хорду AC . Затем проведите радиус OC .

- а) Выпишите равные отрезки, имеющиеся на чертеже.
 - б) Вычислите длину отрезка AB .
 - в) Закрасьте сегмент, не являющийся сектором.
 - г) Закрасьте сектор, являющийся сегментом.
4. Верно ли утверждение: каждая точка ребра тетраэдра принадлежит двум его граням?

Контрольная работа № 2.

Углы

Вариант 1

1. Постройте угол ab с вершиной в точке O величиной 120° . Пусть луч c выходит из точки O и лежит внутри угла ab . Вычислите $\angle cb$, если:
а) $\angle ca = 40^\circ$; б) $\angle cb = 2\angle ca$; в) $\angle cb - \angle ca = 10^\circ$.
2. Постройте тупой угол. Постройте циркулем и линейкой его биссектрису. Постройте другой угол с той же биссектрисой. Дополнительные построения не стирайте.
3. Начертите две прямые, пересекающиеся в точке O . Отложите на одной прямой равные отрезки OP и OM , на другой прямой отрезки OA и OB такие, что $OA = 2OP$ и $OB = 2OM$. Постройте отрезки AP и BM и докажите, что они равны.
4. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и проведите в его гранях диагонали AB_1 и $B_1 D_1$. Пусть точка O — середина отрезка $B_1 D_1$. Верны ли утверждения:
а) отрезок OC_1 перпендикулярен отрезку $B_1 D_1$;
б) треугольники $AB B_1$ и $A_1 B_1 C_1$ равны?

Вариант 2

1. Постройте угол cb с вершиной в точке O величиной 60° . Пусть луч p выходит из точки O и лежит внутри угла cb . Вычислите $\angle pb$, если:
а) $\angle pc = 10^\circ$; б) $\angle pb = 2\angle pc$; в) $\angle pb - \angle pc = 10^\circ$.

2. Постройте острый угол. Постройте циркулем и линейкой его биссектрису. Постройте другой угол с той же биссектрисой. Дополнительные построения не стирайте.
3. Начертите две прямые, пересекающиеся в точке K . Отложите на одной прямой равные отрезки KA и KB , на другой отрезки KM и KP такие, что $KM = 2KA$ и $KP = 2KB$. Постройте отрезки AM и BP и докажите, что они равны.
4. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и проведите в его гранях диагонали AC и $C_1 D$. Пусть точка O — середина отрезка AC . Верны ли утверждения:
 - а) отрезок OD перпендикулярен отрезку AC ;
 - б) треугольники CAD и DCC_1 равны?

Контрольная работа № 3.

Треугольники

Вариант 1

1. Проведите две прямые, пересекающиеся в точке O . На одной из них отложите равные между собой отрезки OA и OB , на другой — равные между собой отрезки OK и OM . Докажите, что $AK = BM$. Найдите на построенном чертеже угол, равный углу OAK , и запишите его.
2. Восстановите равнобедренный треугольник, если от него остались основание и точка на боковой стороне.
3. Нарисуйте треугольник ABC и внутри его зафиксируйте две точки: K и M . Постройте на сторонах треугольника ABC точки, равноудалённые от точек K и M .
4. Дан тетраэдр $PABC$, в котором $PA = BC$, $AB = PC$, $AC = PB$. На гранях этого тетраэдра найдите углы, равные углу ABC , и запишите их.

Вариант 2

1. Проведите две прямые, пересекающиеся в точке P . На одной из них отложите равные между собой отрезки PK и PM , на другой — равные

между собой отрезки PA и PC . Докажите, что $AK = CM$. Найдите на построенном чертеже угол, равный углу PKC , и запишите его.

2. Восстановите равнобедренный треугольник, если от него остались боковая сторона и точка на высоте к основанию.
3. Нарисуйте окружность и внутри круга, ограниченного ею, зафиксируйте две точки: A и B . Постройте на окружности точки, равноудалённые от точек A и B .
4. Дан тетраэдр $KMOP$, в котором $OK = MP$ и $OM = PK$. На гранях этого тетраэдра найдите угол, равный углу OKP , и запишите его.

Контрольная работа № 4.

Параллельность. Сумма углов треугольника

Вариант 1

1. Вычислите углы треугольника ABC , если $\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \angle C$.
2. Начертите две параллельные прямые и секущую их прямую. Отметьте пару внутренних односторонних углов. Постройте биссектрису каждого из них. Докажите, что эти биссектрисы взаимно перпендикулярны.
3. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, CC_1 — биссектриса треугольника ABC , $CC_1 = 6$ см. Найдите длину отрезка BC_1 .
4. В тетраэдре $PABC$ $PA = PB = PC$, $\angle APB = 40^\circ$, $\angle PBC = 70^\circ$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

Вариант 2

1. Вычислите углы треугольника ABC , если $\angle A = 120^\circ$, а $\angle B = 2\angle C$.
2. Начертите две параллельные прямые и секущую их прямую. Отметьте пару внутренних накрест лежащих углов. Постройте биссектрису каждого из них. Докажите, что эти биссектрисы параллельны.
3. В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, AA_1 — биссектриса треугольника ABC , отрезок $BA_1 = 4$ см. Найдите длину биссектрисы AA_1 .

4. В тетраэдре $KMOP$ $KM = KO = KP$, $\angle KOM = 50^\circ$, $\angle OKP = 80^\circ$. Докажите, что треугольник MOP — равнобедренный.

Учебное издание
Серия «Академический школьный учебник»

Евстафьева Лариса Петровна
Евстафьев Валентин Андреевич

Геометрия
Дидактические материалы
7 класс

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Андрееenkova*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *О. Ю. Тупикина, С. А. Крутиков*
Корректоры *Л. А. Ермолина*



Л. П. Евстафьева В. А. Евстафьев

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы

9 класс

Пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2014

Евстафьева Л. П.

Геометрия. Дидактические материалы. 9 класс : пособие для общеобразоват. организаций / Л. П. Евстафьева, В. А. Евстафьев. – М.: Просвещение, 2014.

Дидактические материалы предназначены для учащихся общеобразовательных классов, работающих по учебнику авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика «Геометрия. 9 класс».

Книга содержит самостоятельные работы в четырёх вариантах к пунктам учебника и контрольные работы к основным темам курса, а также итоговые контрольные работы в восьми вариантах.

© Издательство «Просвещение», 2014

© Художественное оформление.

Издательство «Просвещение», 2014

Все права защищены

СОДЕРЖАНИЕ

- Самостоятельная работа № 1 (1.1). Скалярные и векторные величины.
Направленные отрезки
- Самостоятельная работа № 2 (§1—2)
- Самостоятельная работа № 3 (1.3, 1.4). Равенство векторов
- Самостоятельная работа № 4 (1.5). Угол между векторами
- Самостоятельная работа № 5 (2.1). Сложение векторов
- Самостоятельная работа № 6 (2.2). Свойства сложения
- Самостоятельная работа № 7 (2.3). Вычитание векторов
- Самостоятельная работа № 8 (3.1). Умножение вектора на число
- Самостоятельная работа № 9 (3.2). Распределительные законы умножения
вектора на число
- Самостоятельная работа № 10 (4.1). Векторный метод решения задач
- Самостоятельная работа № 11 (5.1). Векторы на координатной оси
- Самостоятельная работа № 12 (5.2). Векторы на координатной плоскости
- Самостоятельная работа № 13 (5.3). Действия с векторами в координатной
форме
- Самостоятельная работа № 14 (5.2, 5.3, 2.1, 2.3, 3.1)
- Самостоятельная работа № 15 (6.2). Скалярное произведение векторов
- Самостоятельная работа № 16 (6.2). Скалярное произведение векторов
- Контрольная работа по теме «Векторы»
- Самостоятельная работа № 17 (7.1). Понятие преобразования
- Самостоятельная работа № 18 (7.2). Важные примеры преобразований
- Самостоятельная работа № 19 (7.4). Композиция преобразований
- Самостоятельная работа № 20 (8.3). Параллельный перенос
- Самостоятельная работа № 21 (8.4, 8.5). Различные виды симметрии
- Самостоятельная работа № 22 (10.2, 10.3). Гомотетия, подобие
- Самостоятельная работа № 23 (10.3, 10.4). Подобие треугольников
- Применение векторов к решению задач
- Самостоятельная работа № 24 (11.1). Свойства хорд
- Самостоятельная работа № 25 (11.2). Касание прямой и окружности. Взаимное
расположение прямой и окружности
- Самостоятельная работа № 26 (11.3). Градусная мера дуги окружности
- Самостоятельная работа № 27 (11.4). Измерение вписанных углов
- Самостоятельная работа № 28 (11.4). Измерение вписанных углов
- Самостоятельная работа № 29 (11.4). Измерение углов, связанных с
окружностью
- Самостоятельная работа № 30 (11.5). Произведение отрезков, хорд и секущих

Самостоятельная работа № 31 (11.5). Производство отрезков, хорд и секущих

Самостоятельная работа № 32 (12.1). Окружность, описанная вокруг
многоугольника

Самостоятельная работа № 33 (12.1). Окружность, описанная вокруг
многоугольника

Самостоятельная работа № 34 (12.1). Окружность, описанная вокруг
многоугольника

Самостоятельная работа № 35 (12.2). Окружность, вписанная в многоугольник

Самостоятельная работа № 36 (12.2). Окружность, вписанная в треугольник

Самостоятельная работа № 37 (12.1, 12.2). Вписанные и описанные
многоугольники

Самостоятельная работа № 38 (13.1). Длина окружности

Самостоятельная работа № 39 (13.2). Длина дуги окружности

Самостоятельная работа № 40 (13.3). Площадь круга

Дополнительные задачи к главе III

Итоговые контрольные работы по планиметрии для 9 класса

Ответы к итоговым контрольным работам по планиметрии для 9 класса

Решение задач части II итоговых контрольных работ по планиметрии для
9 классов (варианты 1—4)

Решение задач части II итоговых контрольных работ по планиметрии для
9 классов (варианты 5—8)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 1 (1.1).

СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ

Вариант 1

1. Какие из величин: *масса, скорость, площадь* — векторные, а какие скалярные?
2. Изобразите перемещения трёх туристов из точки A , если один турист движется на северо-восток на 2 км, другой — на юго-запад на 4 км, а третий — на север на расстояние 4 км. Есть ли среди этих перемещений равные?
3. В прямоугольном треугольнике ABC , где угол C — прямой, $\cos A = \frac{3}{5}$, $AB = 10$. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе, и площадь треугольника.

Вариант 2

1. Какие из величин: *время, сила, объём* — векторные, а какие скалярные?
2. Изобразите перемещения трёх туристов из точки B , если один турист движется на север на 3 км, другой — на восток на 3 км, а третий — на юго-запад на расстояние 6 км. Есть ли среди этих перемещений равные?
3. В прямоугольном треугольнике ABC , где угол C — прямой, $\sin B = \frac{3}{5}$, $AB = 15$. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе, и площадь треугольника.

Вариант 3

1. Какие из величин: *скорость, объём, расстояние* — векторные, а какие скалярные?
2. Изобразите перемещения трёх туристов из точки C , если один турист движется на запад на 2 км, другой — на север на 2 км, а третий — на юго-восток на расстояние 4 км. Есть ли среди этих перемещений равные?
3. В прямоугольном треугольнике ABC , где угол C — прямой, $\sin A = \frac{4}{5}$, $AC = 8$. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе, и площадь треугольника.

Вариант 4

1. Какие из величин: *сила, масса, время* — векторные, а какие скалярные?
2. Изобразите перемещения трёх туристов из точки K , если один турист движется на юго-запад на 3 км, другой — на юг на 3 км, а третий — на восток на расстояние 6 км. Есть ли среди этих перемещений равные?
3. В прямоугольном треугольнике ABC , где угол C — прямой, $\cos B = \frac{4}{5}$, $CB = 12$. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе, и площадь треугольника.

1. Изобразите остроугольный треугольник ABC , в котором стороны BA и BC равны. Проведите в нём медиану BM и высоту AK . Используя только точки A, B, C, K и M , назовите пары векторов:
 - а) равных;
 - б) противоположных;
 - в) взаимно перпендикулярных;
 - г) сонаправленных, но не равных;
 - д) противонаправленных, но не противоположных;
 - е) неколлинеарных, но равных по модулю.
2. Изобразите отрезок AB и разделите его на три равные части. Используя четыре заданные точки, назовите:
 - а) три вектора, два из которых противонаправлены третьему;
 - б) вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{AB}$, модуль которого равен $\frac{2}{3}$ модуля вектора $\overrightarrow{AB}$;
 - в) два противонаправленных вектора;
 - г) два вектора, отношение модулей которых равно 2.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60° , $AB = 3$ см, $BC = 5$ см. Найдите длину диагонали BD и площадь параллелограмма.

Вариант 2

1. Изобразите тупоугольный треугольник MPK , в котором стороны MP и PK равны. Проведите в нём медиану PB и высоту KA . Используя только точки A, B, P, K и M , назовите пары векторов:
 - а) равных;
 - б) противоположных;
 - в) взаимно перпендикулярных;
 - г) сонаправленных, но не равных;
 - д) противоположенных, но не противоположных;
 - е) неколлинеарных, но равных по модулю.
2. Изобразите отрезок KC и разделите его на четыре равные части. Используя пять заданных точек, назовите:
 - а) четыре вектора, два из которых противоположены двум другим;
 - б) вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{CK}$, модуль которого равен $\frac{3}{4}$ модуля вектора $\overrightarrow{CK}$;
 - в) два противоположенных вектора;
 - г) два вектора, отношение модулей которых равно 3.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол B равен 60° , $AB = 3$ см, $AD = 5$ см. Найдите длину диагонали AC и площадь параллелограмма.

Вариант 3

1. Изобразите остроугольный треугольник QTE , в котором стороны EQ и QT равны. Проведите в нём биссектрису QB и высоту EF . Используя только точки F, B, Q, T и E , назовите пары векторов:
 - а) равных;
 - б) противоположных;
 - в) взаимно перпендикулярных;
 - г) сонаправленных, но не равных;
 - д) противоположенных, но не противоположных;
 - е) неколлинеарных, но равных по модулю.
2. Изобразите отрезок DF и разделите его на три равные части. Используя четыре заданные точки, назовите:
 - а) три вектора, один из которых противоположен двум другим;
 - б) вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{FD}$, модуль которого равен $\frac{1}{3}$ модуля вектора $\overrightarrow{FD}$;
 - в) два противоположенных вектора;
 - г) два противоположенных вектора, отношение модулей которых равно 2.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол D равен 120° , $AD = 4$ см, $DC = 5$ см. Найдите длину диагонали AC и площадь параллелограмма.

Вариант 4

1. Изобразите остроугольный треугольник QDM , в котором стороны DQ и DM равны. Проведите в нём биссектрису DB и высоту QA . Используя только точки A, D, Q, B и M , назовите пары векторов:
 - а) равных;
 - б) противоположных;
 - в) взаимно перпендикулярных;
 - г) сонаправленных, но не равных;
 - д) противоположенных, но не противоположных;
 - е) неколлинеарных, но равных по модулю.
2. Изобразите отрезок PE и разделите его на четыре равные части. Используя пять заданных точек, назовите:
 - а) четыре вектора, один из которых противоположен трём другим;
 - б) вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{PE}$, модуль которого равен $\frac{3}{4}$ модуля вектора $\overrightarrow{PE}$;
 - в) два противоположенных вектора;
 - г) два сонаправленных вектора, отношение модулей которых равно 3.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол C равен 60° , $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, Найдите длину диагонали BD и площадь параллелограмма.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 3 (1.3, 1.4).

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Вариант 1

1. Изобразите параллелограмм $ABCD$ и две его диагонали, пересекающиеся в точке O . Укажите по рисунку вектор, равный данному вектору:

а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{DB}$; в) $\overrightarrow{OA}$.

2. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и две диагонали его грани (рис. 1). Перечислите все векторы, определяемые указанными точками, равные данному вектору:

а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{A_1 O}$; в) $\overrightarrow{OB_1}$.

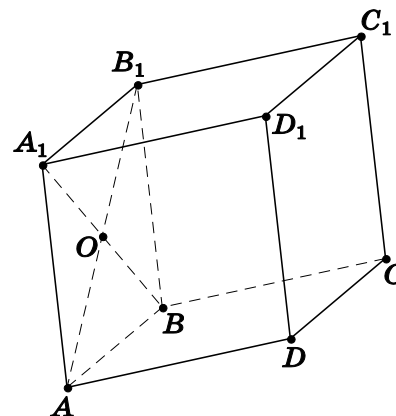


Рис. 1

3. Известно, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$. Назовите ещё пару равных векторов, определяемых точками M, N, K, L .
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла B , которая пересекает сторону AC в точке D , $AD = 4$, $CD = 6$, $BA = 12$. Найдите BC .

Вариант 2

1. Изобразите параллелограмм $ABCD$ и две его диагонали, пересекающиеся в точке O . Укажите по рисунку вектор, равный данному вектору:

а) $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{OD}$.

2. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и две диагонали его грани (рис. 2). Перечислите все векторы, определяемые указанными точками, равные данному вектору:

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{C_1 O}$; в) $\overrightarrow{OB_1}$.

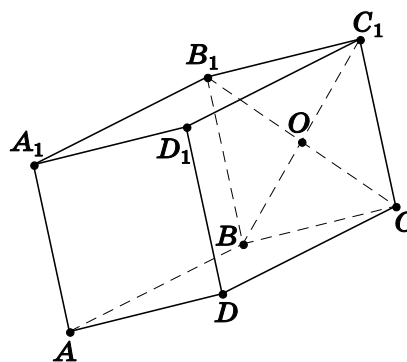


Рис. 2

3. Известно, что $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$. Назовите ещё пару равных векторов, определяемых точками A, B, P, Q .
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла C , которая пересекает сторону AB в точке D , $CB = 12$, $CA = 18$, $BD = 4$. Найдите AD .

Вариант 3

1. Изобразите параллелограмм $ABCD$ и две его диагонали, пересекающиеся в точке O . Укажите по рисунку вектор, равный данному вектору:

а) $\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{OC}$.

2. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и две диагонали его грани (рис. 3). Перечислите все векторы, определяемые указанными точками, равные данному вектору:

а) $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{D_1 O}$; в) $\overrightarrow{OC_1}$.

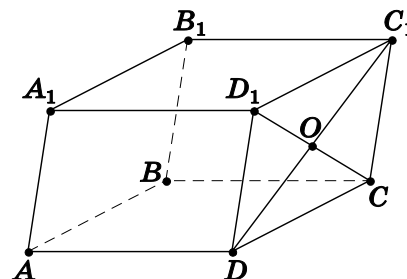


Рис. 3

3. Известно, что $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CE}$. Назовите ещё пару равных векторов, определяемых точками F, A, C, E .
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла A , которая пересекает сторону BC в точке D , $BD = 6$, $CB = 14$, $AC = 20$. Найдите AB .

Вариант 4

1. Изобразите параллелограмм $ABCD$ и две его диагонали, пересекающиеся в точке O . Укажите по рисунку вектор, равный данному вектору:

а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{OB}$.

2. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и две диагонали его грани (рис. 4). Перечислите все векторы, определяемые указанными точками, равные данному вектору:

а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{A_1 O}$; в) $\overrightarrow{OB_1}$.

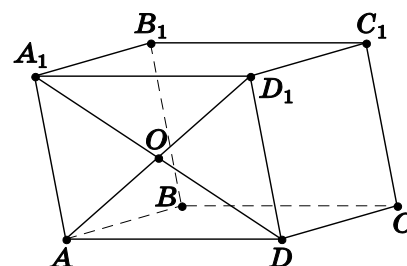


Рис. 4

3. Известно, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$. Назовите ещё пару равных векторов, определяемых точками M, N, K, L .
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла B , которая пересекает сторону AC в точке D , $AB = 12$, $BC = 9$, AD больше DC на 2. Найдите AC .

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 4 (1.5).

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Вариант 1

1. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60° , O — точка пересечения его диагоналей.

Найдите углы между векторами:

- а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$;
д) $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$; ж) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DB}$.

2. В тетраэдре $PABC$ все рёбра равны между собой. Точка M — середина AB .

Найдите углы между векторами: а) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MB}$; в) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{PB}$.

3. Даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, причём $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Вариант 2

1. В ромбе $MPQS$ угол P равен 120° , E — точка пересечения его диагоналей.

Найдите углы между векторами:

- а) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MS}$; б) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{QP}$; в) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{SQ}$; г) $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{SM}$;
д) $\overrightarrow{ES}$ и $\overrightarrow{EQ}$; е) $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QM}$; ж) $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{SP}$.

2. В тетраэдре $DMEK$ все рёбра равны между собой. Точка A — середина EM .

Найдите углы между векторами: а) $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{DK}$; б) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$; в) $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{DE}$.

3. Даны три точки M, N, K , не лежащие на одной прямой, причём $MN = 12$, $MK = 5$, $KN = 13$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$.

Вариант 3

1. В ромбе $ABCD$ угол BCA равен 30° , O — точка пересечения его диагоналей.

Найдите углы между векторами:

- а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$;
д) $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DB}$; ж) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DB}$.

2. В тетраэдре $KLMN$ все рёбра равны между собой. Точка D — середина MN .

Найдите углы между векторами: а) $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{ML}$; б) $\overrightarrow{DK}$ и $\overrightarrow{DL}$; в) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{KL}$.

3. Даны три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой, причём $AB = 7$, $BC = \sqrt{39}$, $AC = 5$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Вариант 4

1. В ромбе $MPQS$ угол PSQ равен 60° , E — точка пересечения его диагоналей.

Найдите углы между векторами:

- а) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MS}$; б) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{QP}$; в) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{SQ}$; г) $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{SM}$;
д) $\overrightarrow{ES}$ и $\overrightarrow{EQ}$; е) $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{QM}$; ж) $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{SP}$.

2. В тетраэдре $FGTE$ все рёбра равны между собой. Точка C — середина TE .

Найдите углы между векторами: а) $\overrightarrow{TF}$ и $\overrightarrow{TG}$; б) $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{CE}$; в) $\overrightarrow{TF}$ и $\overrightarrow{FE}$.

3. Даны три точки M , N , K , не лежащие на одной прямой, причём $MN = 7$, $MK = 5$, $NK = \sqrt{109}$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 5 (2.1).

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Вариант 1

1. Изобразите векторы по данным условиям и изобразите вектор, равный их сумме:
 - а) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$;
 - б) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$;
 - в) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;
 - г) $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 60^\circ$;
 - д) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, если $ABCD$ — трапеция, в которой $AD \parallel BC$.
2. Найдите $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$, если $|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = 10$, $\angle \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} = 135^\circ$.
3. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Означает ли это, что $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$?

Вариант 2

1. Изобразите векторы по данным условиям и изобразите вектор, равный их сумме:
 - а) $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{q}$, $|\vec{m}| \neq |\vec{q}|$;
 - б) $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{q}$, $|\vec{m}| \neq |\vec{q}|$;
 - в) $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{q}$, $|\vec{m}| = |\vec{q}|$;
 - г) $|\vec{m}| \neq |\vec{q}|$, $\angle \vec{m} \vec{q} = 120^\circ$;
 - д) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MK}$, если $PQMK$ — трапеция, в которой $PQ \parallel MK$.
2. Найдите $|\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DK}|$, если $|\overrightarrow{DE}| = 3\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{DK}| = 5$, $\angle \overrightarrow{DE} \overrightarrow{DK} = 120^\circ$.
3. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 7$. Означает ли это, что $|\vec{b} + \vec{a}| = 12$?

Вариант 3

1. Изобразите векторы по данным условиям и изобразите вектор, равный их сумме:

а) $\vec{d} \uparrow\uparrow \vec{e}$, $|\vec{d}| \neq |\vec{e}|$;

б) $\vec{d} \uparrow\downarrow \vec{e}$, $|\vec{d}| \neq |\vec{e}|$;

в) $\vec{d} \uparrow\downarrow \vec{e}$, $|\vec{d}| = |\vec{e}|$;

г) $|\vec{d}| \neq |\vec{e}|$, $\angle \vec{d} \vec{e} = 135^\circ$;

д) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, если $ABCD$ — трапеция, в которой $AD \parallel BC$.

2. Найдите $|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MK}|$, если $|\overrightarrow{MP}| = 4\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{MK}| = 5$, $\angle \overrightarrow{MP} \overrightarrow{MK} = 45^\circ$.

3. Пусть $\vec{c} \parallel \vec{k}$, $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{k}| = 11$. Может ли быть, что $|\vec{c} + \vec{k}| = 15$?

Вариант 4

1. Изобразите векторы по данным условиям и изобразите вектор, равный их сумме:

а) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$;

б) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$;

в) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

г) $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 60^\circ$;

д) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, если $ABCD$ — трапеция, в которой $AD \parallel BC$.

2. Найдите $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$, если $|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = 10$, $\angle \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} = 135^\circ$.

3. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Означает ли это, что $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 6 (2.2).

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ

Вариант 1

1. Найдите сумму векторов:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NA}$.

2. Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:

а) $\overrightarrow{AM} = \dots + \dots$; б) $\overrightarrow{AM} = \dots + \dots + \dots$.

3. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите $|\vec{x}|$, если

$$\vec{x} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{D_1 C_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1 D}.$$

4. В треугольнике ABC угол A равен 80° , $AB = 4$, $AC = 8$. В треугольнике MNK угол M равен 80° , $NM = 6$, $KM = 12$.

а) Во сколько раз площадь треугольника MNK больше площади треугольника ABC ?

б) Во сколько раз периметр треугольника MNK больше периметра треугольника ABC ?

Вариант 2

1. Найдите сумму векторов:

а) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PA}$.

2. Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:

а) $\overrightarrow{AK} = \dots + \dots$; б) $\overrightarrow{AK} = \dots + \dots + \dots$.

3. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите $|\vec{x}|$, если

$$\vec{x} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{A_1 D_1} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D_1 D}.$$

4. В треугольнике ABC угол B равен 76° , $BA = 6$, $BC = 8$. В треугольнике MNK угол M равен 76° , $NM = 9$, $KM = 12$.

а) Какую часть площадь треугольника ABC составляет от площади треугольника MNK ?

б) Какую часть периметр треугольника ABC составляет от периметра треугольника MNK ?

Вариант 3

1. Найдите сумму векторов:

а) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}$.

2. Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:

а) $\overrightarrow{MK} = \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}}$; б) $\overrightarrow{MK} = \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}}$.

3. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите $|\vec{x}|$, если

$$\vec{x} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{C_1 D_1} + \overrightarrow{B_1 B}.$$

4. В треугольнике ABC $AC = 12$, $BA = 16$, $BC = 24$. В треугольнике MNK $KN = 36$, $NM = 18$, $KM = 24$.

- а) Какую часть площадь треугольника ABC составляет от площади треугольника MNK ?
- б) Какую часть периметр треугольника ABC составляет от периметра треугольника MNK ?

Вариант 4

1. Найдите сумму векторов:

а) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$; в) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{NK}$.

2. Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:

а) $\overrightarrow{BM} = \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}}$; б) $\overrightarrow{BM} = \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}}$.

3. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 1. Найдите $|\vec{x}|$, если

$$\vec{x} = \overrightarrow{D_1 D} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D_1 C_1} + \overrightarrow{AA_1}.$$

4. В треугольнике ABC $AC = 12$, $BA = 16$, $BC = 24$. В треугольнике MNK $KN = 20$, $NM = 30$, $KM = 15$.

- а) Какую часть площадь треугольника ABC составляет от площади треугольника MNK ?
- б) Какую часть периметр треугольника ABC составляет от периметра треугольника MNK ?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 7 (2.3).

ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вариант 1

- Докажите, что: а) $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QM}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP}$.
- Отложите от одной точки векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых не равны. Изобразите вектор $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.
- Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, не имеющие общего начала и такие, что а) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; б) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; в) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. Для каждого из случаев постройте вектор $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$.
- Изобразите параллелограмм $AMPN$ и его диагонали. Найдите:
а) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NA}$; б) $\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{NA}$; в) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NM}$.
- Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:
а) $\overrightarrow{AK} = \overline{\hspace{1cm}} - \overline{\hspace{1cm}}$; б) $\overrightarrow{AK} = \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}} - \overline{\hspace{1cm}}$.

Вариант 2

- Докажите, что: а) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KM}$; б) $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{AN}$.
- Отложите от одной точки векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, длины которых не равны. Изобразите вектор $\vec{x} = \vec{n} - \vec{m}$.
- Изобразите векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, не имеющие общего начала и такие, что а) $\vec{m} \parallel \vec{n}$; б) $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{m}$; в) $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{m}$. Для каждого из случаев постройте вектор $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$.
- Изобразите параллелограмм $AMPN$ и его диагонали. Найдите:
а) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MA}$; б) $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}$; в) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PA}$.
- Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:
а) $\overrightarrow{MB} = \overline{\hspace{1cm}} - \overline{\hspace{1cm}}$; б) $\overrightarrow{MB} = \overline{\hspace{1cm}} + \overline{\hspace{1cm}} - \overline{\hspace{1cm}}$.

Вариант 3

- Докажите, что: а) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KD}$; б) $\overrightarrow{PK} - \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{DL}$.
- Отложите от одной точки векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, длины которых не равны. Изобразите вектор $\vec{x} = \vec{n} - \vec{m}$.
- Изобразите векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, не имеющие общего начала и такие, что а) $\vec{p} \parallel \vec{q}$; б) $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{q}$; в) $\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{q}$. Для каждого из случаев постройте вектор $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$.
- Изобразите параллелограмм $ABPO$ и его диагонали. Найдите:
а) $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PO}$; б) $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{PO}$; в) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP}$.
- Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:
а) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{\quad} - \overrightarrow{\quad}$; б) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{\quad} + \overrightarrow{\quad} - \overrightarrow{\quad}$.

Вариант 4

- Докажите, что: а) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CK}$.
- Отложите от одной точки векторы $\vec{d}$ и $\vec{f}$, длины которых не равны. Изобразите вектор $\vec{x} = \vec{f} - \vec{d}$.
- Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{h}$, не имеющие общего начала и такие, что а) $\vec{a} \parallel \vec{h}$; б) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{h}$; в) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{h}$. Для каждого из случаев постройте вектор $\vec{b} = \vec{h} - \vec{a}$.
- Изобразите параллелограмм $ABCD$ и его диагонали. Найдите:
а) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
- Даны четыре точки A, B, M, K . Заполните пропуски:
а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\quad} - \overrightarrow{\quad}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\quad} + \overrightarrow{\quad} - \overrightarrow{\quad}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 8 (3.1).

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Вариант 1

1. Длина вектора $\vec{a}$ 6 единиц. Вычислите длины следующих векторов:

$\vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$; $\vec{c} = 2,5 \cdot \vec{a}$; $\vec{m} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{a}$; $\vec{n} = \frac{5}{4} \cdot \vec{a}$. Изобразите все перечисленные векторы.

2. Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие общее начало, а затем вектор

$$\vec{x} = -1,5 \cdot \vec{a} + \frac{4}{3} \cdot \vec{b}.$$

3. Нарисуйте треугольник ABC и его медиану AA_1 . Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Выразите вектор $\overrightarrow{AA_1}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Изобразите параллелограмм $ABCD$. Точки M и N лежат на стороне BC так,

что $BM = MN = NC$. Точка P — середина CD . Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{DP}$; $\overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MP}$.

Вариант 2

1. Длина вектора $\vec{a}$ 8 единиц. Вычислите длины следующих векторов:

$\vec{p} = 2 \cdot \vec{a}$; $\vec{q} = -1,5 \cdot \vec{a}$; $\vec{d} = -\frac{3}{4} \cdot \vec{a}$; $\vec{f} = \frac{17}{16} \cdot \vec{a}$. Изобразите все перечисленные векторы.

2. Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие общее начало, а затем вектор

$$\vec{x} = 2,5 \cdot \vec{a} - \frac{5}{3} \cdot \vec{b}.$$

3. Нарисуйте треугольник ABC и его медиану BB_1 . Пусть $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$.

Выразите вектор $\overrightarrow{BB_1}$ через $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

4. Изобразите параллелограмм $ABCD$. Точки M и N лежат на стороне AD так,

что $AM = MN = ND$. Точка P — середина BA . Пусть $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{DP}$; $\overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MP}$.

Вариант 3

1. Длина вектора $\vec{a}$ 9 единиц. Вычислите длины следующих векторов:

$\vec{m} = -\frac{4}{3} \cdot \vec{a}$; $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a}$; $\vec{q} = 1\frac{2}{3} \cdot \vec{a}$; $\vec{k} = \frac{5}{6} \cdot \vec{a}$. Изобразите все перечисленные векторы.

2. Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие общее начало, а затем вектор

$$\vec{x} = -\frac{2}{7} \cdot \vec{a} + 1\frac{1}{3} \cdot \vec{b}.$$

3. Нарисуйте треугольник ABC , его медианы AA_1 и BB_1 . Точка M — точка их пересечения. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{MC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Изобразите параллелограмм $ABCD$. Точки M и N лежат на стороне AB так, что $AM = MN = NB$. Точка P — середина BC . Пусть $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{DP}$; $\overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MP}$.

Вариант 4

1. Длина вектора $\vec{a}$ 4 единицы. Вычислите длины следующих векторов:

$\vec{b} = \frac{5}{2} \cdot \vec{a}$; $\vec{c} = -3 \cdot \vec{a}$; $\vec{d} = -\frac{3}{8} \cdot \vec{a}$; $\vec{e} = \frac{13}{12} \cdot \vec{a}$. Изобразите все перечисленные векторы.

2. Изобразите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие общее начало, а затем вектор

$$\vec{x} = 1\frac{1}{3} \cdot \vec{a} - 2,3 \cdot \vec{b}.$$

3. Нарисуйте треугольник ABC , его медианы AA_1 и CC_1 . Точка M — точка их пересечения. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{MB}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Изобразите параллелограмм $ABCD$. Точки M и N лежат на стороне CD так, что $CM = MN = ND$. Точка P — середина DA . Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы: $\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{DP}$; $\overrightarrow{CP}$; $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MP}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 9 (3.2).

РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Вариант 1

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие общее начало, такие, что $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Изобразите векторы $\vec{x} = 3 \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) - 2 \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$; $\vec{y} = -2 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b}$.
2. Известно, что $3 \cdot (2\vec{a} - 7\vec{b}) - 5 \cdot (\vec{a} - 4\vec{b}) = \vec{0}$. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Найдите $|\vec{a}|$, если $|\vec{b}| = 2,5$.
3. В треугольнике ABC $AB = 4$, $\sin C = \frac{2}{3}$, $\sin A = 0,8$. Найдите BC .

Вариант 2

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, имеющие общее начало, такие, что $|\vec{c}| \neq |\vec{d}|$. Изобразите векторы $\vec{x} = -3 \cdot (\vec{c} - 2\vec{d}) + 2 \cdot (4\vec{c} - 3\vec{d})$; $\vec{y} = 2 \cdot (\vec{c} - \vec{d}) - \vec{c}$.
2. Известно, что $2 \cdot (3\vec{a} - 4\vec{b}) - 3 \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{0}$. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Найдите $|\vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 3,4$.
3. В треугольнике MNK $MN = 6$, $\sin K = 0,6$, $\sin M = \frac{4}{5}$. Найдите NK .

Вариант 3

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, имеющие общее начало, такие, что $|\vec{p}| \neq |\vec{q}|$. Изобразите векторы $\vec{x} = -2\vec{p} + 4 \cdot (\vec{p} - \vec{q}) - 3 \cdot \left(\vec{p} - \frac{4}{3} \cdot \vec{q} \right)$; $\vec{y} = -3\vec{q} + 2 \cdot (\vec{q} + \vec{p})$.
2. Известно, что $-3 \cdot (2\vec{d} - 7\vec{c}) + 5 \cdot (\vec{d} - 5\vec{c}) = \vec{0}$. Докажите, что векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Найдите $|\vec{c}|$, если $|\vec{d}| = 6,4$.
3. В треугольнике ABC $BC = 6$, $\sin A = 0,6$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AC .

Вариант 4

1. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющие общее начало, такие, что $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Изобразите векторы $\vec{x} = -5 \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) + 4 \cdot (-\vec{a} + 3\vec{b}) - (-17\vec{a} + 22\vec{b})$; $\vec{y} = -3 \cdot \left(\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \right) + 2\vec{a}$.
2. Известно, что $-2 \cdot (3\vec{p} - 4\vec{q}) + 3 \cdot (\vec{p} + 3\vec{q}) = \vec{0}$. Докажите, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны. Найдите $|\vec{p}|$, если $|\vec{q}| = 6$.
3. В треугольнике MNK $MK = 12$, $\sin N = 0,8$, $\cos K = \frac{4}{5}$. Найдите MN .

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 10 (4.1).

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Вариант 1

1. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC соответственно взяты точки K и P так, что $AK:KB = \frac{2}{3}$ и $AP:PC = \frac{2}{3}$. Докажите, используя векторы, что отрезки KP и BC параллельны и $KP = \frac{2}{3}BC$.
2. В треугольнике MPK AB — средняя линия, параллельная MP . Найдите длину средней линии трапеции $MABP$, если $MP = 12$.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC соответственно взяты точки M и E так, что $BM:MC = \frac{3}{7}$ и $AE:EC = \frac{3}{7}$. Докажите, используя векторы, что отрезки ME и AB параллельны и $ME = \frac{3}{7}AB$.
2. В треугольнике QPM AB — средняя линия, параллельная MP . Найдите длину средней линии трапеции $PBAM$, если $MP = 14$.

Вариант 3

1. В треугольнике MPK на сторонах MP и PK соответственно взяты точки A и C так, что $MA:AP = \frac{4}{9}$ и $PC:CK = \frac{9}{4}$. Докажите, используя векторы, что отрезки AC и MK параллельны и $AC = \frac{4}{9}MK$.
2. В треугольнике ABC PM — средняя линия, параллельная AC . Найдите длину средней линии трапеции $APMC$, если $PM = 9$.

Вариант 4

1. В треугольнике KPE на сторонах KP и PE соответственно взяты точки A и B так, что $KA:AP = \frac{3}{5}$ и $PB:BE = \frac{5}{3}$. Докажите, используя векторы, что отрезки AB и KE параллельны и $AB = 0,6KE$.
2. В треугольнике ABC HK — средняя линия, параллельная BC . Найдите длину средней линии трапеции $BHKS$, если $HK = 7$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 11 (5.1).

ВЕКТОРЫ НА КООРДИНАТНОЙ ОСИ

Вариант 1

1. На координатной оси Ox отметьте точки $O(0)$, $A(-6)$, $B(-2)$, $C(3,5)$, $D(5,5)$ и единичный вектор $\vec{i}$.
 - а) Выразите через вектор $\vec{i}$ векторы $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ и найдите их координаты.
 - б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$, $2 \cdot \overrightarrow{DC}$, $3 \cdot \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{DC}$.
2. На оси Ox расположены точки $O(0)$, $M(-3)$, $N(x)$, $P(2)$, $K(y)$. Найдите x и y , если $\overrightarrow{MN}(5)$, $\overrightarrow{KP}(-3)$.

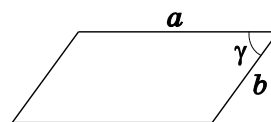
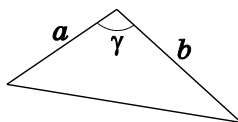


Рис. 5

3. Запишите формулы для определения площади треугольника и параллелограмма (рис. 5).

Вариант 2

1. На координатной оси Ox отметьте точки $O(0)$, $M(-8)$, $N(-2,5)$, $P(3)$, $K(6,5)$ и единичный вектор $\vec{i}$.
 - а) Выразите через вектор $\vec{i}$ векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KP}$ и найдите их координаты.
 - б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}$, $-3 \cdot \overrightarrow{MP}$, $-3 \cdot \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{KP}$.
2. На оси Ox расположены точки $O(0)$, $A(-4)$, $B(x)$, $C(3)$, $D(y)$. Найдите x и y , если $\overrightarrow{AB}(2)$, $\overrightarrow{DC}(-4)$.

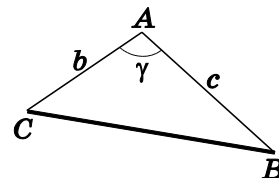
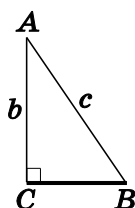


Рис. 6

3. Запишите формулы для вычисления стороны BC (рис. 6).

Вариант 3

1. На координатной оси Ox отметьте точки $O(0)$, $A(-7)$, $B(-3)$, $C(4,5)$, $D(6,5)$ и единичный вектор $\vec{i}$.
 - а) Выразите через вектор $\vec{i}$ векторы $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ и найдите их координаты.
 - б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $-2 \cdot \overrightarrow{CA}$, $-3 \cdot \overrightarrow{AO} - 2 \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. На оси Ox расположены точки $O(0)$, $M(-5)$, $N(x)$, $P(7)$, $K(y)$. Найдите x и y , если $\overrightarrow{NM}(4)$, $\overrightarrow{KP}(-6, 2)$.
3. Запишите формулы для нахождения длины медианы CC_1 (рис. 7).

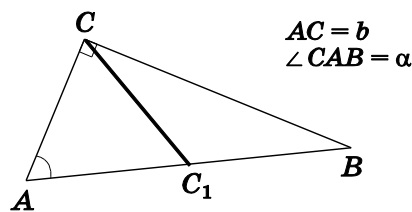
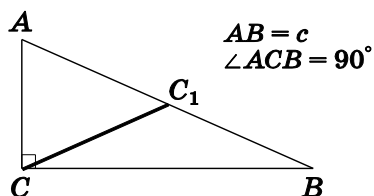
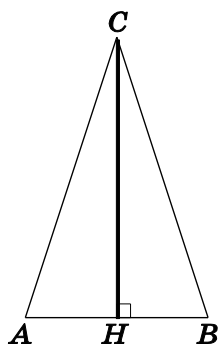


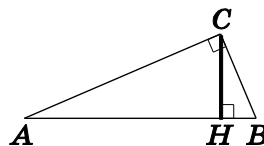
Рис. 7

Вариант 4

1. На координатной оси Ox отметьте точки $O(0)$, $M(-5)$, $N(-1,5)$, $P(2)$, $K(7,5)$ и единичный вектор $\vec{i}$.
- а) Выразите через вектор $\vec{i}$ векторы $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{KN}$ и найдите их координаты.
- б) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OK}$, $2 \cdot \overrightarrow{MK}$, $3 \cdot \overrightarrow{ON} + 2 \cdot \overrightarrow{KM}$.
2. На оси Ox расположены точки $O(0)$, $A(-6)$, $B(x)$, $C(4)$, $D(y)$. Найдите x и y , если $\overrightarrow{BC}(-2)$, $\overrightarrow{DA}(7,4)$.
3. Запишите формулы для вычисления длины высоты CH (рис. 8).



$$\begin{aligned} AB &= b \\ AC &= a \\ BC &= a \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AB &= c \\ AC &= b \\ CB &= a \end{aligned}$$

Рис. 8

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 12 (5.2).

ВЕКТОРЫ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Вариант 1

На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $A(-6; 0)$, $B(0; -2)$, $C(-2; 3)$, $D(4; 5)$.

- а) Выразите через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следующие векторы: $\vec{OA}$; $\vec{OB}$; $\vec{AB}$; $\vec{CD}$.

Запишите их координаты.

- б) От точки $M(2; 3)$ отложите векторы $\vec{x} = (-3; 0)$ и $\vec{y} = (3; -4)$. Найдите длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

- в) Изобразите вектор $\vec{OC}$. Пусть числа c_x и c_y — проекции вектора $\vec{OC}$ на оси координат. Найдите эти числа. Пусть φ_x и φ_y — величины углов, которые вектор $\vec{OC}$ образует с осями координат. Найдите $\cos \varphi_x$ и $\operatorname{tg} \varphi_y$.

Вариант 2

На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $M(0; -6)$, $K(-2; 0)$, $P(3; -2)$, $N(5; 4)$.

- а) Выразите через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следующие векторы: $\vec{OM}$; $\vec{OK}$; $\vec{MK}$; $\vec{PN}$. Запишите их координаты.

- б) От точки $A(3; 2)$ отложите векторы $\vec{x} = (0; -3)$ и $\vec{y} = (-4; 3)$. Найдите длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

- в) Изобразите вектор $\vec{OP}$. Пусть числа p_x и p_y — проекции вектора $\vec{OP}$ на оси координат. Найдите эти числа. Пусть φ_x и φ_y — величины углов, которые вектор $\vec{OP}$ образует с осями координат. Найдите $\cos \varphi_x$ и $\operatorname{tg} \varphi_y$.

Вариант 3

На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; -3)$, $D(5; 4)$.

а) Выразите через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следующие векторы: $\vec{OA}$; $\vec{OB}$; $\vec{AB}$; $\vec{CD}$.

Запишите их координаты.

б) От точки $M(-2; -3)$ отложите векторы $\vec{x} = (3; 0)$ и $\vec{y} = (-3; 4)$. Найдите длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

в) Изобразите вектор $\vec{OC}$. Пусть числа c_x и c_y — проекции вектора $\vec{OC}$ на оси координат. Найдите эти числа. Пусть φ_x и φ_y — величины углов, которые вектор $\vec{OC}$ образует с осями координат. Найдите $\cos \varphi_x$ и $\operatorname{tg} \varphi_y$.

Вариант 4

На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $M(0; 6)$, $K(2; 0)$, $P(-3; 2)$, $N(-5; -4)$.

а) Выразите через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следующие векторы: $\vec{OM}$; $\vec{OK}$; $\vec{MK}$; $\vec{PN}$. Запишите их координаты.

б) От точки $A(-3; -2)$ отложите векторы $\vec{x} = (0; 3)$ и $\vec{y} = (4; -3)$. Найдите длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

в) Изобразите вектор $\vec{OP}$. Пусть числа p_x и p_y — проекции вектора $\vec{OP}$ на оси координат. Найдите эти числа. Пусть φ_x и φ_y — величины углов, которые вектор $\vec{OP}$ образует с осями координат. Найдите $\cos \varphi_x$ и $\operatorname{tg} \varphi_y$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 13 (5.3).

ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Вариант 1

- Даны точки $F(-8; 3)$ и $P(-5; 7)$.
 - Найдите координаты вектора $\overrightarrow{FP}$.
 - Найдите длину вектора $\overrightarrow{FP}$.
 - Найдите координаты точки M — середины отрезка FP .
- На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $A(-6; 0)$, $B(0; -2)$, $C(-2; 3)$, $D(4; 5)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}$, $2 \cdot \overrightarrow{CD}$, $3 \cdot \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{CD}$.
- Назовите пару коллинеарных векторов среди данных: $\overrightarrow{a} = (-4; 6)$, $\overrightarrow{b} = (6; -9)$, $\overrightarrow{c} = (12; -8)$.

Вариант 2

- Даны точки $E(3; -8)$ и $K(7; -5)$.
 - Найдите координаты вектора $\overrightarrow{KE}$.
 - Найдите длину вектора $\overrightarrow{KE}$.
 - Найдите координаты точки T — середины отрезка KE .
- На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $M(0; -6)$, $K(-2; 0)$, $P(3; -2)$, $N(5; 4)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{MK}$, $3 \cdot \overrightarrow{PN}$, $2 \cdot \overrightarrow{OK} - 3 \cdot \overrightarrow{PN}$.
- Назовите пару коллинеарных векторов среди данных: $\overrightarrow{a} = (6; -4)$, $\overrightarrow{b} = (-8; 12)$, $\overrightarrow{c} = (-9; 6)$.

Вариант 3

1. Даны точки $M(-6; 4)$ и $K(-3; 8)$.
 - а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MK}$.
 - б) Найдите длину вектора $\overrightarrow{MK}$.
 - в) Найдите координаты точки P — середины отрезка MK .
2. На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; -3)$, $D(-4; -5)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}$, $2 \cdot \overrightarrow{CD}$, $3 \cdot \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{CD}$.
3. Назовите пару коллинеарных векторов среди данных: $\vec{a} = (-9; 12)$, $\vec{b} = (24; -18)$, $\vec{c} = (6; -8)$.

Вариант 4

1. Даны точки $A(-8; 3)$ и $B(-4; 6)$.
 - а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.
 - б) Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.
 - в) Найдите координаты точки C — середины отрезка AB .
2. На координатной плоскости xOy отметьте точки $O(0; 0)$, $M(0; 6)$, $K(2; 0)$, $P(-3; 2)$, $N(-5; -4)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{MK}$, $3 \cdot \overrightarrow{PN}$, $2 \cdot \overrightarrow{OK} - 3 \cdot \overrightarrow{PN}$.
3. Назовите пару коллинеарных векторов среди данных: $\vec{a} = (12; -9)$, $\vec{b} = (-8; 6)$, $\vec{c} = (18; -24)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 14 (5.2, 5.3, 2.1, 2.3, 3.1)

Вариант 1

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы направленными отрезками (рис. 9).

Задайте направленными отрезками векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2 \cdot \vec{a}$, $-1,5 \cdot \vec{b}$, $-2 \cdot \vec{a} + 1,5 \cdot \vec{b}$.

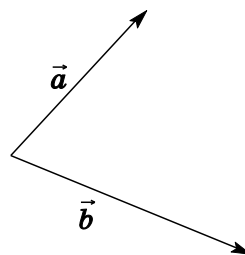


Рис. 9

2. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы своими координатами: $\vec{x} = (-2; -3)$, $\vec{y} = (4; -2)$.

Задайте координатами векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} - \vec{y}$, $-2 \cdot \vec{x}$, $1,5 \cdot \vec{y}$, $2 \cdot \vec{x} - 1,5 \cdot \vec{y}$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (x; -2)$, $\vec{b} = (3; y)$, $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b}$. Найдите числа x и y , если $\vec{c} = (9; 12)$.

Вариант 2

1. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы направленными отрезками (рис. 10).

Задайте направленными отрезками векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} - \vec{y}$, $-2 \cdot \vec{x}$, $1,5 \cdot \vec{y}$, $2 \cdot \vec{x} - 1,5 \cdot \vec{y}$.

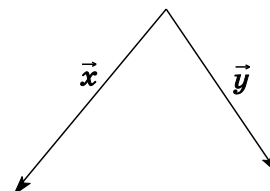


Рис. 10

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (-1; 4)$, $\vec{b} = (-4; -6)$.

Задайте координатами векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2 \cdot \vec{a}$, $-1,5 \cdot \vec{b}$, $-2 \cdot \vec{a} + 1,5 \cdot \vec{b}$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (3; x)$, $\vec{b} = (-2; y)$, $\vec{c} = \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$. Найдите числа x и y , если $\vec{c} = (7; -2)$.

Вариант 3

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы направленными отрезками (рис. 11).

Задайте направленными отрезками векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $1,5 \cdot \vec{a}$, $-2 \cdot \vec{b}$, $-1,5 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$.

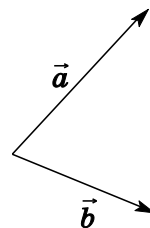


Рис. 11

2. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы своими координатами: $\vec{x} = (3; -2)$, $\vec{y} = (-2; 4)$.

Задайте координатами векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} - \vec{y}$, $-2 \cdot \vec{x}$, $1,5 \cdot \vec{y}$, $2 \cdot \vec{x} - 1,5 \cdot \vec{y}$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (x; -3)$, $\vec{b} = (4; y)$, $\vec{c} = -2 \cdot \vec{a} + 3 \vec{b}$. Найдите числа x и y , если $\vec{c} = (10; 9)$.

Вариант 4

1. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ заданы направленными отрезками (рис. 12).

Задайте направленными отрезками векторы $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x} - \vec{y}$, $-1,5 \cdot \vec{x}$, $2 \cdot \vec{y}$, $2 \cdot \vec{x} - 1,5 \cdot \vec{y}$.

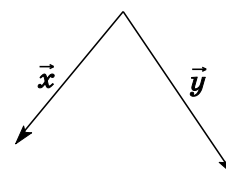


Рис. 12

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-2; 4)$.

Задайте координатами векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2 \cdot \vec{a}$, $-1,5 \cdot \vec{b}$, $-2 \cdot \vec{a} + 1,5 \cdot \vec{b}$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-5; x)$, $\vec{b} = (y; -3)$, $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \vec{b}$. Найдите числа x и y , если $\vec{c} = (-28; 13)$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 15 (6.2).

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Вариант 1

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , угол AOB равен 60° , $AB = 2$. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}^2$.
2. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ребро куба равно 4. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{A_1 A}$ и $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{B_1 A_1}$ и $\overrightarrow{A_1 C_1}$, $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.
3. Известно, что $|\vec{a}| = 14$, $|\vec{b}| = 37$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Найдите угол между этими векторами.
4. Найдите $|\vec{a}|$, если $|\vec{b}| = 6$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 120^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$.

Вариант 2

1. В прямоугольнике $MNKP$ диагонали пересекаются в точке O , угол MON равен 120° , $KN = 4$. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KN}^2$.
2. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ребро куба равно 2. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{A_1 A}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{C_1 D_1}$ и $\overrightarrow{A_1 C_1}$, $\overrightarrow{B_1 A}$ и $\overrightarrow{B_1 C}$, $\overrightarrow{A_1 C_1}$ и $\overrightarrow{B_1 D_1}$.
3. Известно, что $|\vec{a}| = 58$, $|\vec{b}| = 43$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Найдите угол между этими векторами.
4. Найдите $|\vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 10$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 120^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -40$.

Вариант 3

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , угол COD равен 60° , $CD = 6$. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}^2$.
2. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ребро куба равно 2. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{C_1 C}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CA}$.
3. Известно, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.
4. Найдите $|\vec{a}|$, если $|\vec{b}| = 8\sqrt{2}$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 135^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -20$.

Вариант 4

1. В прямоугольнике $MNKP$ диагонали пересекаются в точке O , угол $МОК$ равен 60° , $MP = 2$. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OP}$, и $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{PM}^2$.
2. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ребро куба равно 4. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1 A}$, $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{A_1 C_1}$ и $\overrightarrow{C_1 D_1}$, $\overrightarrow{B_1 C}$ и $\overrightarrow{B_1 A}$, $\overrightarrow{B_1 D_1}$ и $\overrightarrow{A_1 C_1}$.
3. Известно, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.
4. Найдите $|\vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 12\sqrt{2}$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 135^\circ$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 16 (6.2).

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Вариант 1

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и напишите, какой угол (острый, прямой или тупой) образуют эти векторы:

а) $\vec{a} = (-2; 3)$ и $\vec{b} = (1; -2)$;

б) $\vec{a} = (3; 2)$ и $\vec{b} = (-1; 4)$;

в) $\vec{a} = (-2; 5)$ и $\vec{b} = (10; 4)$.

2. Векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = (4; -3)$ и $\vec{b} = (5; 12)$.

Вычислите: $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a}|^2$; $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; $\cos(\angle \vec{a} \vec{b})$; $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

Вариант 2

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и напишите, какой угол (острый, прямой или тупой) образуют эти векторы:

а) $\vec{c} = (2; 3)$ и $\vec{d} = (4; -1)$;

б) $\vec{c} = (3; -2)$ и $\vec{d} = (-2; 1)$;

в) $\vec{c} = (5; -2)$ и $\vec{d} = (4; 10)$.

2. Векторы заданы своими координатами: $\vec{c} = (3; -4)$ и $\vec{d} = (-12; 5)$.

Вычислите: $\vec{c} \cdot \vec{d}$; $|\vec{c}|^2$; $|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|$; $\cos(\angle \vec{c} \vec{d})$; $\vec{c} \cdot (\vec{c} - \vec{d})$.

Вариант 3

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и напишите, какой угол (острый, прямой или тупой) образуют эти векторы:

а) $\vec{a} = (4; 6)$ и $\vec{c} = (-8; 2)$;

б) $\vec{a} = (6; -4)$ и $\vec{c} = (4; -2)$;

в) $\vec{a} = (5; 1)$ и $\vec{c} = (4; 10)$.

2. Векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = (-6; 8)$ и $\vec{c} = (6; 2, 5)$.

Вычислите: $\vec{c} \cdot \vec{a}$; $\vec{a}^2$; $|\vec{c}| \cdot |\vec{a}|$; $\cos(\angle \vec{a} \vec{c})$; $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - 3\vec{c})$.

Вариант 4

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ и напишите, какой угол (острый, прямой или тупой) образуют эти векторы:

а) $\vec{m} = (3; -6)$ и $\vec{n} = (-1; 1, 5)$;

б) $\vec{m} = (-0, 5; 2)$ и $\vec{n} = (6; 4)$;

в) $\vec{m} = (5; 2)$ и $\vec{n} = (-1; 2, 5)$.

2. Векторы заданы своими координатами: $\vec{m} = (12; 5)$ и $\vec{n} = (-1, 5; 2)$.

Вычислите: $\vec{m} \cdot \vec{n}$; $\vec{m}^2$; $|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|$; $\cos(\angle \vec{m} \vec{n})$; $\vec{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{m} - 2 \cdot \vec{n} \right)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ»

Вариант 1

1. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 13), $BM = MN = NC$, $CP = CD$, $AB = 4$, $AD = 6$, угол A равен 60° . Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

а) Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы:

$$\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{MP}.$$

б) Вычислите: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AM}$.

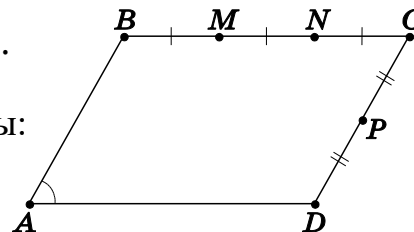


Рис. 13

2. Даны точки $A(-3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; -10)$ и $D(5; -12)$. Докажите, что прямые AB и BC взаимно перпендикулярны, а прямые AB и CD параллельны.
3. Известно, что $\vec{a} = (x; 4)$, $\vec{b} = (-2; y)$, $\vec{c} = (4; -6)$. При каких значениях x и y векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ параллельны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при этом ортогональны?
4. Даны точки $A(x; y)$, $B(-12; 6)$, $C(2; -3)$ — середина AB . Найдите x и y .

Вариант 2

1. $MPQF$ — параллелограмм (рис. 14), $MA = AC = CB = BK = KP$, $PE = EQ$, $PQ = 6$, $FQ = 8$, угол Q равен 135° . Пусть $\overrightarrow{MP} = \vec{m}$, $\overrightarrow{PQ} = \vec{p}$.

а) Выразите через $\vec{p}$ и $\vec{m}$ следующие векторы:

$$\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{KE}.$$

б) Вычислите: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MF}$; $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{AE}$.

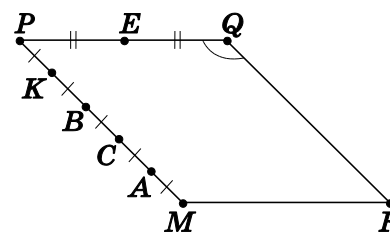


Рис. 14

2. Даны точки $A(-2; -1)$, $B(1; 1)$, $C(3; -2)$ и $D(9; 2)$. Докажите, что прямые AB и BC взаимно перпендикулярны, а прямые AB и CD параллельны.
3. Известно, что $\vec{a} = (4; y)$, $\vec{b} = (x; -2)$, $\vec{c} = (-6; 4)$. При каких значениях x и y векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ параллельны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при этом ортогональны?
4. Даны точки $A(x; y)$, $B(18; -8)$, $C(5; -1)$ — середина AB . Найдите x и y .

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 17 (7.1).

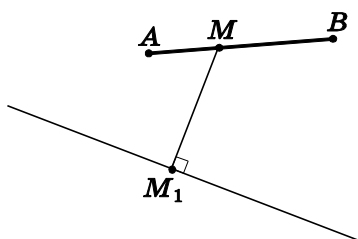
ПОНЯТИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вариант 1

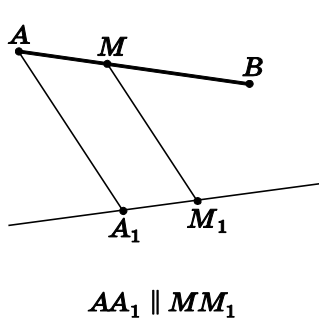
1. Найдите образ данной фигуры при указанном преобразовании (рис. 15).

Выделите двумя различными цветами саму фигуру и её образ, если M — произвольная точка данной фигуры, M_1 — её образ.

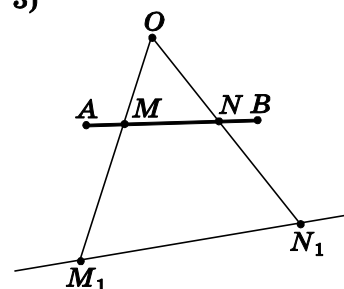
1)



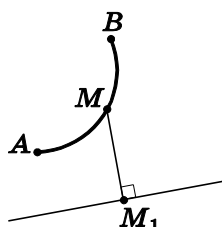
2)



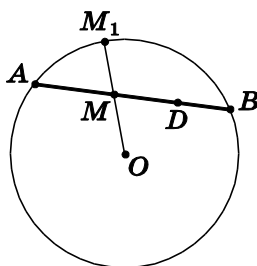
3)



4)



5)



6)

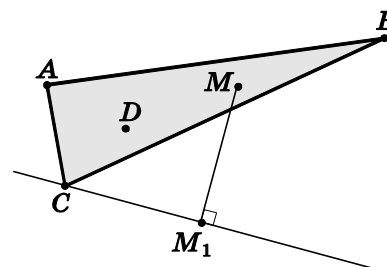


Рис. 15

Ответьте на вопросы:

а) Есть ли при данном преобразовании неподвижные точки?

б) Равны ли образ и прообраз?

в) На рисунках 5 и 6 пусть некая точка D_1 является образом точки D . Только ли точка D является прообразом точки D_1 ?

2. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 16), $BM = MN = NC$. Площадь $ABCD$ равна Q . Выразите через Q площадь треугольника ABM .

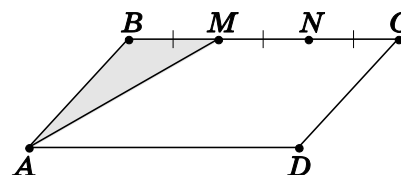


Рис. 16

3. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 17), $CM = MN = ND$. Площадь $ABCD$ равна F . Выразите через F площадь четырёхугольника $ABMD$.

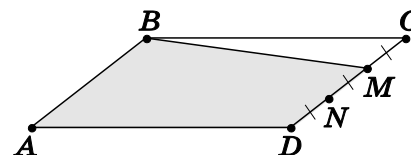
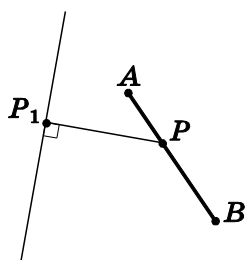


Рис. 17

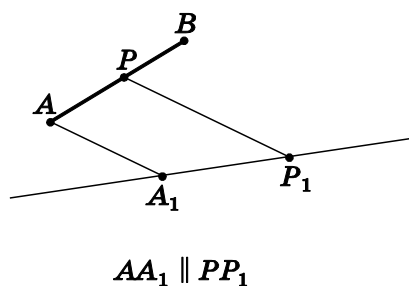
Вариант 2

1. Найдите образ данной фигуры при указанном преобразовании (рис. 18). Выделите двумя различными цветами саму фигуру и её образ, если P — произвольная точка данной фигуры, P_1 — её образ.

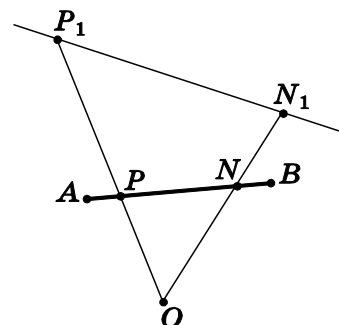
1)



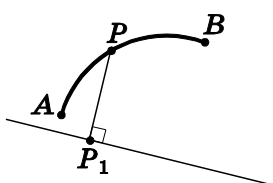
2)



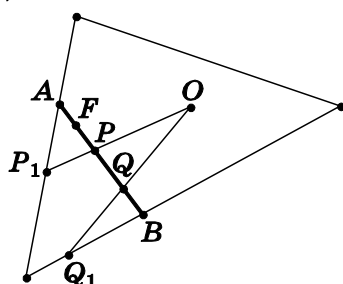
3)



4)



5)



6)

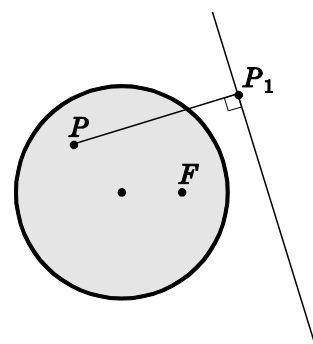


Рис. 18

Ответьте на вопросы:

- Есть ли при данном преобразовании неподвижные точки?
- Равны ли образ и прообраз?
- На рисунках 5 и 6 пусть некая точка F_1 является образом точки F . Только ли точка F является прообразом точки F_1 ?

2. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 19), $BM = MN = NC$. Площадь $ABCD$ равна Q . Выразите через Q площадь треугольника ACM .

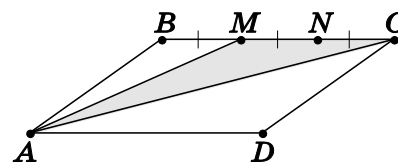


Рис. 19

3. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 20), $CM = MN = ND$. Площадь $ABCD$ равна F . Выразите через F площадь четырёхугольника $ABMN$.

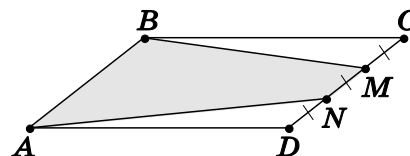
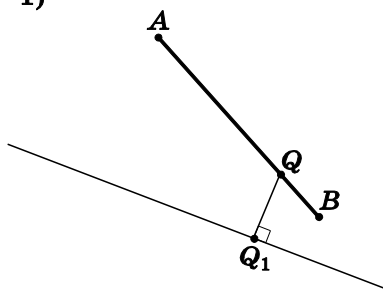


Рис. 20

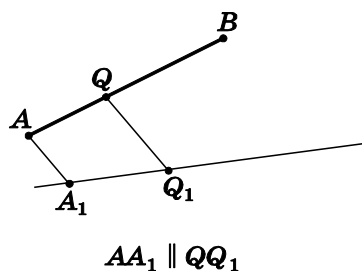
Вариант 3

1. Найдите образ данной фигуры при указанном преобразовании (рис. 21). Выделите двумя различными цветами саму фигуру и её образ, если Q — произвольная точка данной фигуры, Q_1 — её образ.

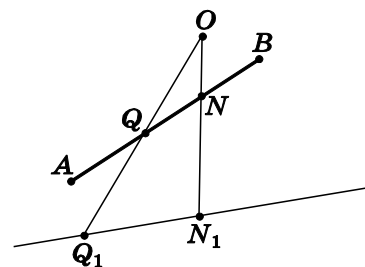
1)



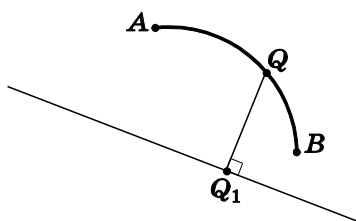
2)



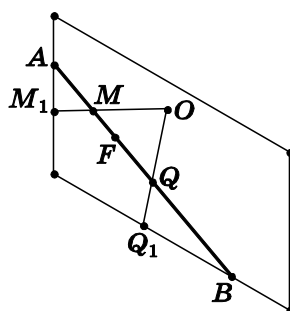
3)



4)



5)



6)

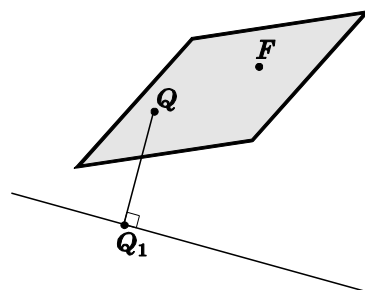


Рис. 21

Ответьте на вопросы:

- Есть ли при данном преобразовании неподвижные точки?
- Равны ли образ и прообраз?

в) На рисунках 5 и 6 пусть некая точка F_1 является образом точки F . Только ли точка F является прообразом точки F_1 ?

2. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 22), $BM = MN = NC$. Площадь $ABCD$ равна Q . Выразите через Q площадь четырёхугольника $ANCD$.

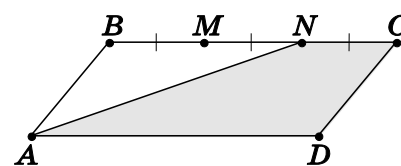


Рис. 22

3. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 23), $CM = MN = ND$. Площадь $ABCD$ равна F . Выразите через F площадь треугольника ACN .

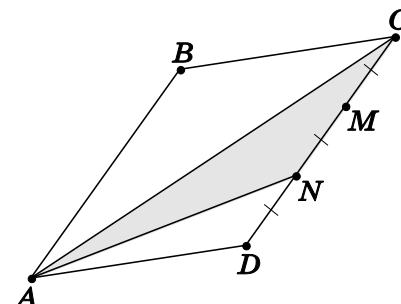
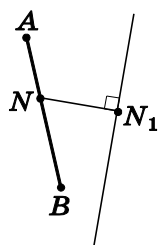


Рис. 23

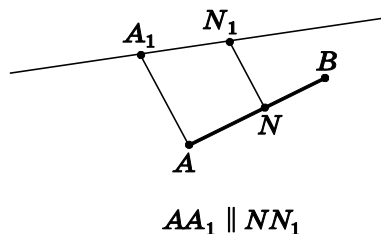
Вариант 4

1. Найдите образ данной фигуры при указанном преобразовании (рис. 24). Выделите двумя различными цветами саму фигуру и её образ, если N — произвольная точка данной фигуры, N_1 — её образ.

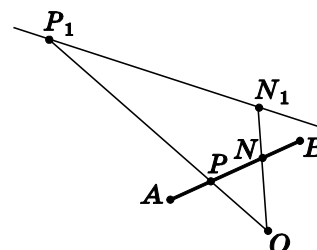
1)



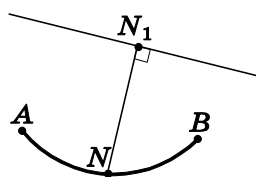
2)



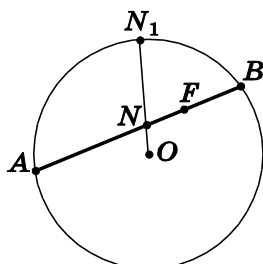
3)



4)



5)



6)

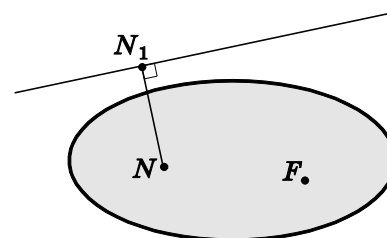


Рис. 24

Ответьте на вопросы:

а) Есть ли при данном преобразовании неподвижные точки?

б) Равны ли образ и прообраз?

в) На рисунках 5 и 6 пусть некая точка F_1 является образом точки F . Только ли точка F является прообразом точки F_1 ?

2. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 25), $BM = MN = NC$, $CP = PD$. Площадь $ABCD$ равна Q . Выразите через Q площадь четырёхугольника $APCM$.

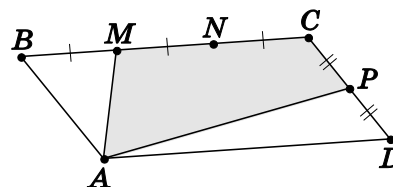


Рис. 25

3. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 26), $CM = MN = ND$. Площадь $ABCD$ равна F . Выразите через F площадь треугольника AMN .

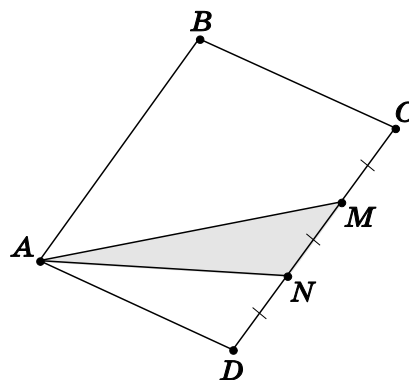


Рис. 26

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 18 (7.2).

ВАЖНЫЕ ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вариант 1

1. На рисунке 27 выполните следующие преобразования:

а) для точки A найдите образ при осевой симметрии с осью l ;

б) для точки M найдите образ при центральной симметрии с центром O ;

в) для точки B найдите образ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$;

г) для точки N найдите образ при гомотетии с центром O и коэффициентом 1,5.

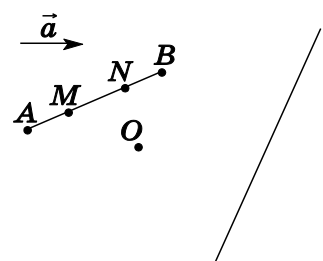


Рис. 27

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AB = 25$, $AC = 20$.
Найдите $\operatorname{tg} A$.

Вариант 2

1. На рисунке 28 выполните следующие преобразования:
- для точки B найдите образ при осевой симметрии с осью k ;
 - для точки C найдите образ при центральной симметрии с центром E ;
 - для точки D найдите образ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$;
 - для точки A найдите образ при гомотетии с центром E и коэффициентом -2 .

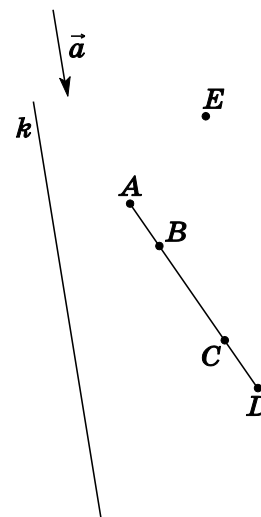


Рис. 28

2. В прямоугольном треугольнике MKP ($\angle P = 90^\circ$) $MK = 26$, $KP = 10$.
Найдите $\operatorname{tg} K$.

Вариант 3

1. На рисунке 29 выполните следующие преобразования:
- для точки A найдите образ при осевой симметрии с осью k ;
 - для точки M найдите образ при центральной симметрии с центром O ;
 - для точки D найдите образ при параллельном переносе на вектор $\vec{AO}$;
 - для точки N найдите образ при гомотетии с центром O и коэффициентом $-0,5$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH , $CH = 6$, $CB = 10$. Найдите $\operatorname{tg} B$.

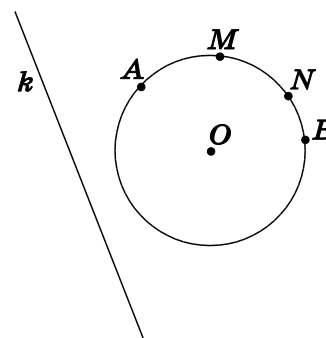


Рис. 29

Вариант 4

1. На рисунке 30 выполните следующие преобразования:

а) для точки B найдите образ при осевой симметрии с осью k ;

б) для точки P найдите образ при центральной симметрии с центром E ;

в) для точки D найдите образ при параллельном переносе на вектор $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$;

г) для точки A найдите образ при гомотетии с центром E и коэффициентом 0,5.

2. В прямоугольном треугольнике MNP ($\angle P = 90^\circ$) проведена высота PH , $PH = 12$, $MP = 13$. Найдите $\operatorname{tg} M$.

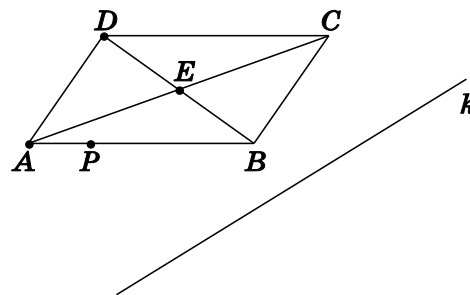


Рис. 30

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 19 (7.4).

КОМПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вариант 1

1. Постройте образ точки A (рис. 31) при следующей композиции преобразований:

а) сначала перенос на вектор $\vec{a}$, потом осевая симметрия с осью k . Точка A_1 .

б) сначала осевая симметрия с осью k , потом перенос на вектор $\vec{a}$. Точка A_2 .

Обладает ли эта композиция перестановочным свойством?

При какой композиции точка A является образом точки A_1 ?

2. В треугольнике ABC угол A равен 37° , угол B равен 53° , $AB = 8$. Найдите длину медианы, проведённой к стороне AB .

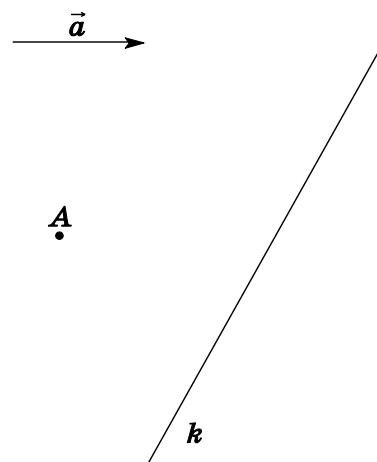


Рис. 31

Вариант 2

1. Постройте образ точки B (рис. 32) при следующей композиции преобразований:

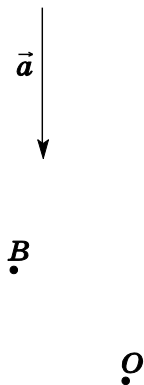
- а) сначала центральная симметрия с центром O , потом перенос на вектор $\vec{a}$. Точка B_1 .
 б) сначала перенос на вектор $\vec{a}$, потом центральная симметрия с центром O . Точка B_2 .

Обладает ли эта композиция перестановочным свойством?

При какой композиции точка B является образом точки B_1 ?

2. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ образует углы 28° и 62° со сторонами AD и CD . Найдите длину другой диагонали, если $AC = 8$.

Рис. 32



Вариант 3

1. Постройте образ точки C (рис. 33) при следующей композиции преобразований:

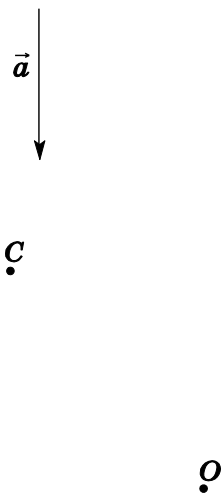
- а) сначала гомотетия с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{2}$, потом перенос на вектор $\vec{a}$. Точка C_1 .
 б) сначала перенос на вектор $\vec{a}$, потом гомотетия с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Точка C_2 .

Обладает ли эта композиция перестановочным свойством?

При какой композиции точка C является образом точки C_1 ?

2. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 12$, BM — медиана, $BM = 8$. Найдите длину медианы, проведенной к стороне AB .

Рис. 33



Вариант 4

1. Постройте образ точки K (рис. 34) при следующей композиции преобразований:

а) сначала центральная симметрия с центром O ,
потом осевая симметрия с осью p . Точка K_1 .

б) сначала осевая симметрия с осью p , потом
центральная симметрия с центром O . Точка K_2 .

Обладает ли эта композиция перестановочным свойством?

При какой композиции точка C является образом точки C_1 ?

2. В треугольнике ABC $AB = BC$, BM и AM — медианы. Найдите длину AM , если $AC = 24$, $BM = 9$.

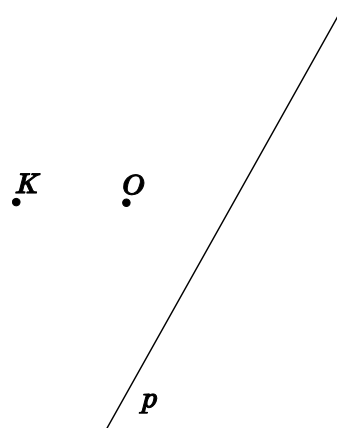


Рис. 34

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 20 (8.3).

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Вариант 1

1. Постройте образ каждой из фигур (рис. 35) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

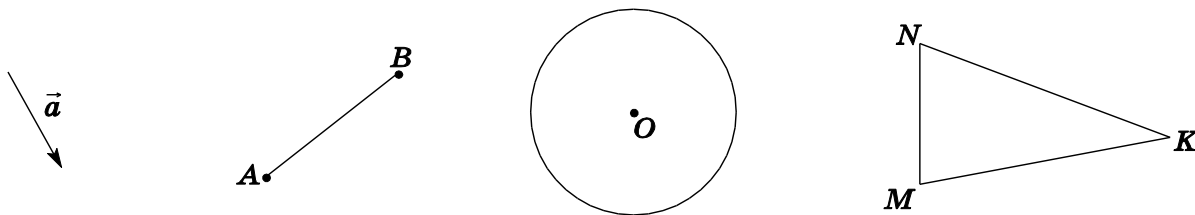


Рис. 35

2. В треугольнике ABC угол A прямой, $AB = 4$, $AC = 6$. Треугольник MNK является образом треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите длины сторон треугольника MNK и его площадь.

Вариант 2

1. Постройте образ каждой из фигур (рис. 36) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

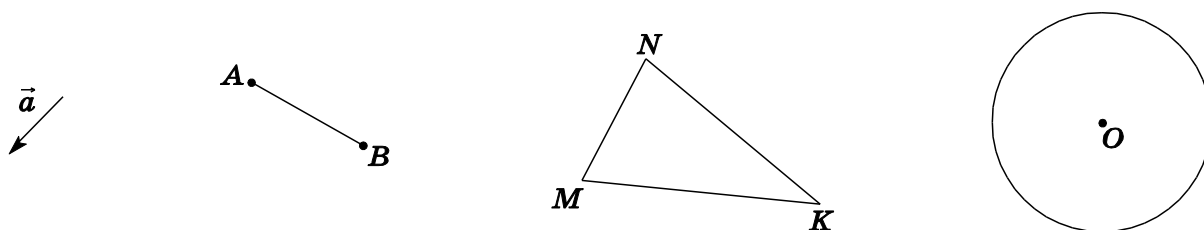


Рис. 36

2. В треугольнике MNK угол M прямой, $NK = 6$, $MN = 4$. Треугольник ABC является образом треугольника MNK при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите длины сторон треугольника ABC и его площадь.

Вариант 3

1. Постройте образ каждой из фигур (рис. 37) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

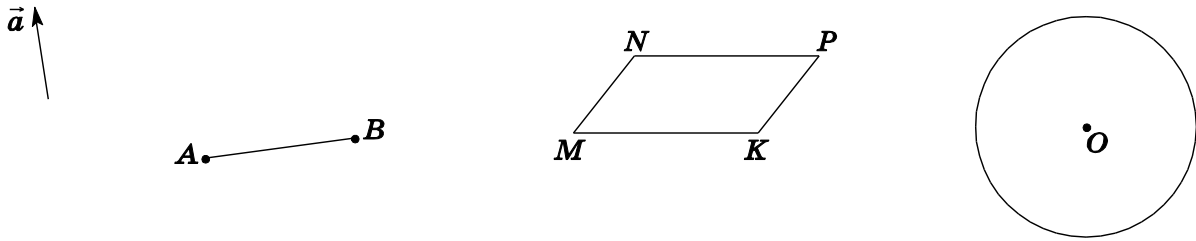


Рис. 37

2. В треугольнике ABC угол C прямой, $AB = 10$, $\sin B = 0,6$. Треугольник MNK является образом треугольника ABC при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите длины сторон треугольника MNK и его площадь.

Вариант 4

1. Постройте образ каждой из фигур (рис. 38) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

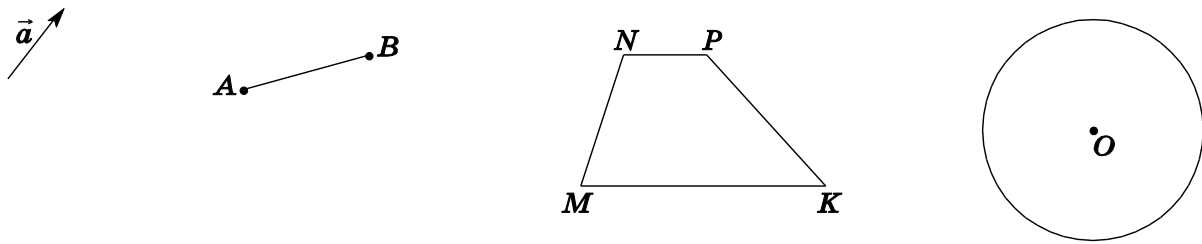


Рис. 38

2. В треугольнике MNK угол M прямой, $\cos N = 0,8$, $NK = 10$. Треугольник ABC является образом треугольника MNK при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите длины сторон треугольника ABC и его площадь.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 21 (8.4, 8.5).

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ СИММЕТРИИ

Вариант 1

1. Какую фигуру представляет собой объединение треугольника ABC и его образа при симметрии относительно точки O — середины AB ?

2. В трапеции $ABCD$ угол B равен 120° , угол D равен 48° (рис. 39). Найдите величины углов четырёхугольника, являющегося образом трапеции $ABCD$ при симметрии относительно прямой l , проходящей через точку D .

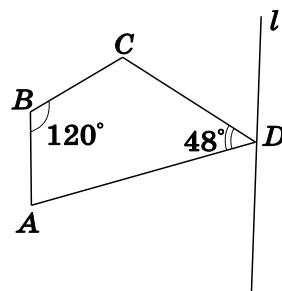


Рис. 39

3. Точки заданы своими координатами: $A(-3; 5)$, $B(2; -1)$. Найдите образ отрезка AB при осевой симметрии относительно оси ординат. Назовите координаты его концов. Есть ли у отрезка AB неподвижная точка при таком преобразовании?
4. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 40) при симметрии относительно точки O .
5. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 41) при симметрии относительно прямой k .

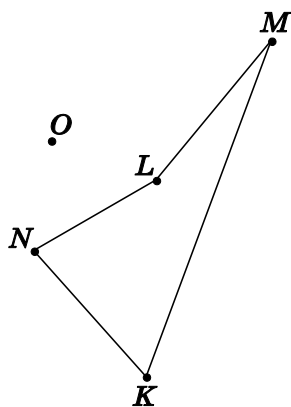


Рис. 40

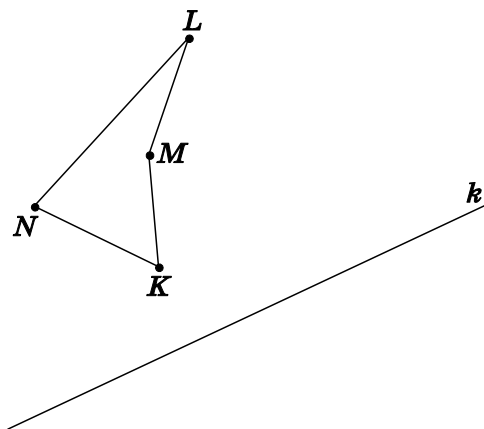


Рис. 41

Вариант 2

1. Какую фигуру представляет собой объединение треугольника MNK и его образа при симметрии относительно точки P — середины MK ?

2. В трапеции $ABDC$ угол B равен 48° , угол A равен 92° (рис. 42). Найдите величины углов четырёхугольника, являющегося образом трапеции $ABCD$ при симметрии относительно прямой l , проходящей через точку A .

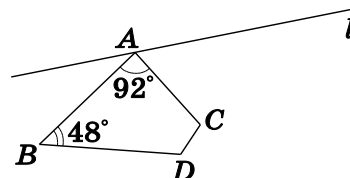


Рис. 42

3. Точки заданы своими координатами: $A(2; -6)$, $B(-3; 4)$. Найдите образ отрезка AB при осевой симметрии относительно оси абсцисс. Назовите координаты его концов. Есть ли у отрезка AB неподвижная точка при таком преобразовании?
4. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 43) при симметрии относительно точки O .
5. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 44) при симметрии относительно прямой k .

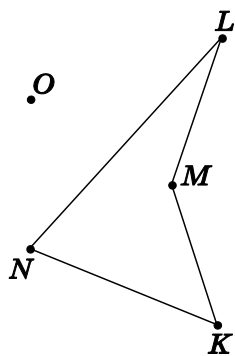


Рис. 43

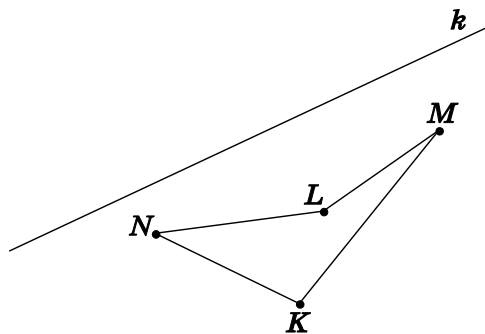


Рис. 44

Вариант 3

1. Какую фигуру представляет собой объединение треугольника ABC и его образа при симметрии относительно точки O — середины AB , если угол C прямой?
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD $\angle A:\angle C = 2:3$, $\angle B:\angle D = 11:7$. Найдите величины углов четырёхугольника, являющегося образом трапеции $ABCD$ при центральной симметрии относительно точки D .
3. Точки заданы своими координатами: $A(-3; 5)$, $B(2; -1)$. Найдите образ отрезка AB при симметрии относительно точки $P(0; 1)$. Назовите координаты его концов. Есть ли у отрезка AB неподвижная точка при таком преобразовании?
4. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 45) при симметрии относительно точки O .
5. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 46) при симметрии относительно прямой l .

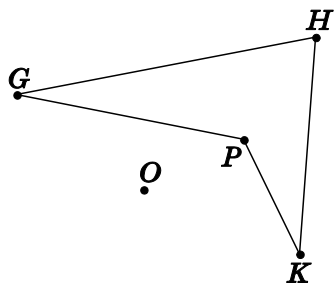


Рис. 45

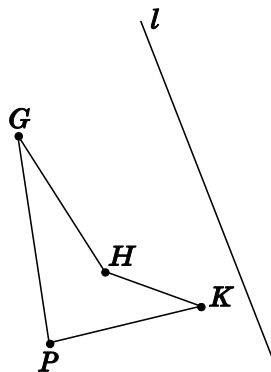


Рис. 46

Вариант 4

1. Какую фигуру представляет собой объединение треугольника MNK и его образа при симметрии относительно точки P — середины MK , если угол N прямой?
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD угол C вдвое больше угла A , а угол B составляет $\frac{2}{7}$ угла C . Найдите величины углов четырёхугольника, являющегося образом трапеции $ABCD$ при симметрии относительно прямой l , проходящей через точку A .
3. Точки заданы своими координатами: $A(2; -6)$, $B(-3; 4)$. Найдите образ отрезка AB при осевой симметрии относительно точки начала координат. Назовите координаты его концов. Есть ли у отрезка AB неподвижная точка при таком преобразовании?
4. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 47) при симметрии относительно точки O .
5. При помощи циркуля и линейки постройте образ многоугольника (рис. 48) при симметрии относительно прямой k .

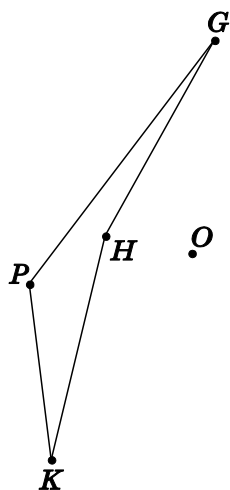


Рис. 47

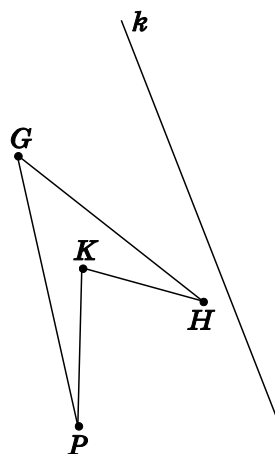


Рис. 48

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 22 (10.2, 10.3).

ГОМОТЕТИЯ, ПОДОБИЕ

Вариант 1

1. Вектор $\vec{a} = (3; -6)$ при некоторой гомотетии переходит в вектор $\vec{a}' = (-4; 5; 9)$. Найдите координаты вектора $\vec{p}'$, в который при этой же гомотетии перейдёт вектор $\vec{p} = (4; -18)$.

2. На рисунке 49 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами. Они гомотетичны (см. задачу 10.9, с. 101 учебника). Найдите для этих треугольников центр гомотетии. Определите, является ли коэффициент гомотетии положительным или отрицательным числом. Ответ обоснуйте.

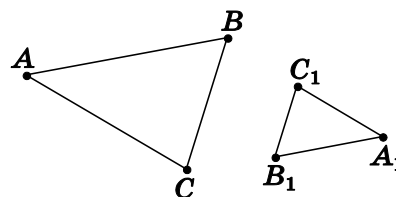


Рис. 49

3. Постройте образ многоугольника $KHGP$ (рис. 50) при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 2. Во сколько раз и как изменятся периметр и площадь образа по сравнению с прообразом?

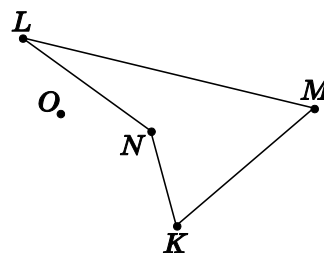


Рис. 50

Вариант 2

1. Вектор $\vec{p} = (5; -3)$ при некоторой гомотетии переходит в вектор $\vec{p}' = (-12,5; 7,5)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}'$, в который при этой же гомотетии перейдёт вектор $\vec{a} = (1; -4)$.

2. На рисунке 51 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами. Они гомотетичны (см. задачу 10.9, с. 101 учебника). Найдите для этих треугольников центр гомотетии. Определите, является ли коэффициент гомотетии положительным или отрицательным числом. Ответ обоснуйте.

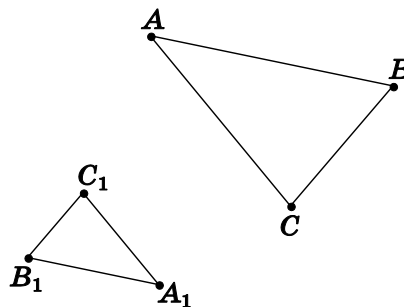


Рис. 51

3. Постройте образ многоугольника $KHGP$ (рис. 52) при O . гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 0,5. Во сколько раз и как изменятся периметр и площадь образа по сравнению с прообразом?

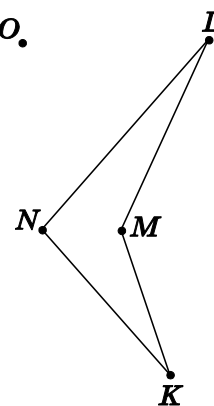


Рис. 52

Вариант 3

1. Вектор $\vec{c} = (9; -6)$ при некоторой гомотетии переходит в вектор $\vec{c}' = (-6; 4)$.

Найдите координаты вектора $\vec{q}'$, в который при этой же гомотетии перейдёт вектор $\vec{q} = (12; 3)$.

2. На рисунке 53 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами. Они гомотетичны (см. задачу 10.9, с. 101 учебника). Найдите для этих треугольников центр гомотетии. Определите, является ли коэффициент гомотетии положительным или отрицательным числом. Ответ обоснуйте.

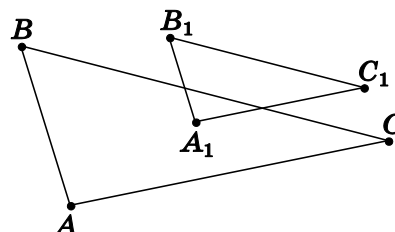


Рис. 53

3. Постройте образ многоугольника $KHGP$ (рис. 54) при гомотетии с центром в точке E и коэффициентом -2 . Во сколько раз и как изменятся периметр и площадь образа по сравнению с прообразом?

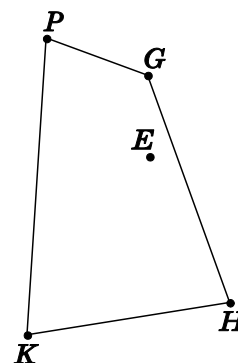


Рис. 54

Вариант 4

1. Вектор $\vec{d} = (8; -10)$ при некоторой гомотетии переходит в вектор $\vec{d}' = (-10; 12,5)$. Найдите координаты вектора $\vec{k}'$, в который при этой же гомотетии перейдёт вектор $\vec{k} = (1; -4)$.

2. На рисунке 55 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами. Они гомотетичны (см. задачу 10.9, с. 101 учебника). Найдите для этих треугольников центр гомотетии. Определите, является ли коэффициент гомотетии положительным или отрицательным числом. Ответ обоснуйте.

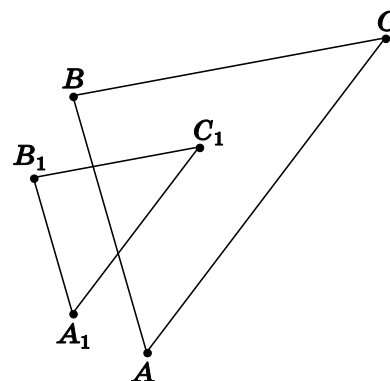


Рис. 55

3. Постройте образ многоугольника $KHGP$ (рис. 56) при гомотетии с центром в точке E и коэффициентом $-0,5$. Во сколько раз и как изменятся периметр и площадь образа по сравнению с прообразом?

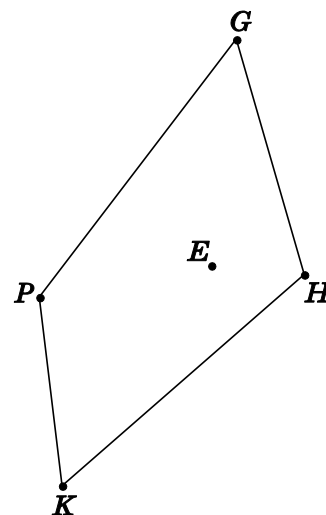


Рис. 56

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 23 (10.3, 10.4).

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Вариант 1

1. В одном из равнобедренных треугольников угол при основании равен 73° , а в другом угол между равными сторонами равен 34° . Основание большего треугольника вдвое больше основания меньшего треугольника. Каково отношение площади меньшего треугольника к площади большего треугольника?
2. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M , на стороне BC — точка K так, что $AB = 4$, $BC = 6$, $BK = 2$, $BM = 3$. Выясните, подобны ли треугольники ABC и MBK .
3. В прямоугольном треугольнике высота делит гипотенузу на отрезки, длины которых 3 см и 12 см. Найдите длину этой высоты.

Вариант 2

1. В треугольнике ABC угол B равен 20° , угол A равен 110° , а в треугольнике MKP угол P равен 50° , а внешний угол при вершине M равен 70° . $PM = 1$, $AC = 2$. Найдите отношение площади меньшего треугольника к площади большего треугольника.
2. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M , на стороне BC — точка K так, что $AB = 10$, $BC = 12$, $BK = 5$, $BM = 6$. Выясните, подобны ли треугольники ABC и MBK .
3. В прямоугольном треугольнике высота, длина которой 6 см, разбивает гипотенузу на два отрезка, меньший из которых равен 3 см. Найдите длину большего отрезка.

Вариант 3

1. В треугольнике ABC $AB = 1$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{7}$. В треугольнике MKP $MK = 4$, $KP = 2$, $\angle MKP = 120^\circ$. Подобны ли эти треугольники?
2. На рисунке 57 $MB = 24$ мм, $BN = 3,6$ см, $BC = 0,36$ дм, $AB = 54$ мм. Выясните, параллельны ли отрезки NM и AB .
3. В прямоугольном треугольнике высота делит гипотенузу на отрезки, длины которых 9 см и 16 см. Найдите длину катета, прилежащего к меньшему из отрезков.

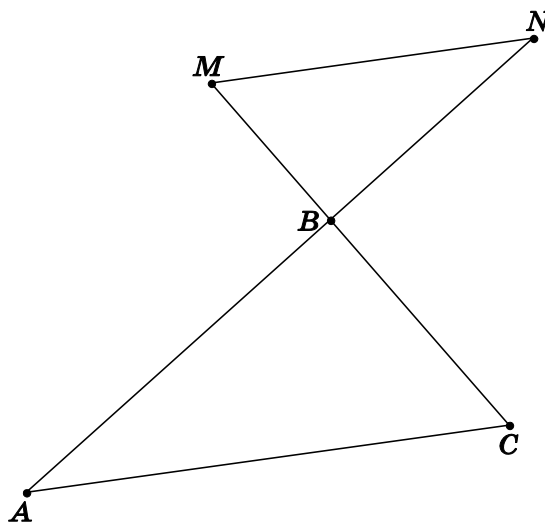


Рис. 57

Вариант 4

1. В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. В треугольнике MKP $MP = 1$, $\angle PMK = 60^\circ$, $KM = \sqrt{3}$. Подобны ли эти треугольники?
2. На рисунке 58 $BA = 24$ мм, $AD = 2,4$ см, $AC = 3,6$ см, $MA = 0,16$ дм. Выясните, параллельны ли отрезки BM и CD .
3. В прямоугольном треугольнике высота делит гипотенузу на отрезки, длины которых 4 см и 12 см. Найдите длину катета, прилежащего к большему из отрезков.

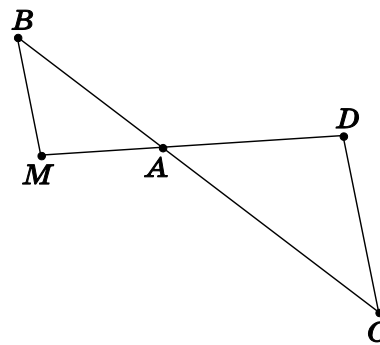


Рис. 58

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Точки заданы координатами: $A(0; -5)$, $B(4; 3)$, $C(0; 7)$, $D(6; 4)$. Докажите, что прямые AB и CD взаимно перпендикулярны.
2. Изобразите прямые AB и CD , заданные уравнениями $AB: y = 3x - 2$ и $CD: y = -\frac{1}{3}x + 3$. Докажите, что прямые AB и CD взаимно перпендикулярны.
3. Точки заданы координатами: $A(0; -3)$, $B(4; -1)$, $C(0; 5)$, $D(-4; 3)$. Докажите, что прямые AB и CD параллельны между собой.
4. Изобразите прямые AB и CD , заданные уравнениями $AB: y = \frac{1}{2}x - 4$ и $CD: y = \frac{1}{2}x + 3$. Докажите, что прямые AB и CD параллельны между собой.
5. Изобразите прямые $AB: y = 2x - 3$, $CD: y = -x + 6$, $MN: y = -\frac{1}{2}x + 2$ и докажите, что при их пересечении образуется прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого треугольника.
6. Изобразите прямые $x = 2$, $y = -0,5x + 2$, $y = -x + 6$ до их взаимного пересечения. Обозначьте и назовите получившийся треугольник. Найдите площадь и косинус наибольшего угла этого треугольника.
7. Изобразите прямые $y = \frac{1}{2}x + 5$, $y = 0,5x + 3$, $y = -2x + 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 6$ до их взаимного пересечения. Докажите, что полученный четырёхугольник является прямоугольной трапецией.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 24 (11.1).

СВОЙСТВА ХОРД

Вариант 1

1. В окружности с центром O радиуса 3 см проведена хорда AB , равная 5 см. Найдите косинус угла, под которым хорда AB видна из точки O . Каким является этот угол — острым, прямым, тупым или развёрнутым?
2. Через середину хорды MN окружности с центром O проведён диаметр AB . Диаметр разделён хордой на два отрезка, длины которых 2 см и 8 см. Найдите длину хорды MN .

Вариант 2

1. В окружности с центром O радиуса 6 см проведена хорда MN , которая видна из центра окружности под углом φ . Найдите длину хорды MN , если $\cos \varphi = -\frac{7}{18}$. Каким является угол φ — острым, прямым, тупым или развёрнутым?
2. Через середину хорды AB окружности с центром O проведён диаметр MN , длина которого 10. Найдите длины отрезков, на которые хорда делит диаметр, если $AB = 8$.

Вариант 3

1. В окружности с центром O радиуса R см проведена хорда AB , равная 10 см. Эта хорда видна из центра окружности под углом φ , таким, что $\cos \varphi = -\frac{7}{18}$. Найдите R и расстояние от центра окружности до хорды.
2. Через середину хорды MN окружности с центром O проведён диаметр AB . Найдите длину хорды MN , если она делит диаметр в отношении 1 : 4, а радиус окружности равен 10.

Вариант 4

1. В окружности с центром O радиуса R см проведена хорда AB , равная 9 см.

Эта хорда видна из центра окружности под углом φ , таким, что $\cos \varphi = \frac{31}{50}$.

Найдите R и расстояние от центра окружности до хорды.

2. Через середину хорды PQ окружности с центром O проведён диаметр DE .

Найдите радиус окружности, если хорда делит диаметр в отношении 4 : 9, а хорда PQ равна 24 см.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 25 (11.2).

КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Вариант 1

1. Через точку M , взятую на окружности с центром O , проведена касательная к окружности. На этой касательной взята точка K так, что $MK = 12$. Найдите радиус окружности, если $OK = 13$.
2. В треугольнике ABC $CA = 24$, $CB = 18$, $AB = 30$. Проведена окружность с центром в точке B радиуса BC . Сколько общих точек имеет прямая AC с этой окружностью?
3. В окружности с центром O проведён диаметр AB и радиус OC (рис. 59). Используя их, постройте две параллельные касательные и две пересекающиеся касательные.

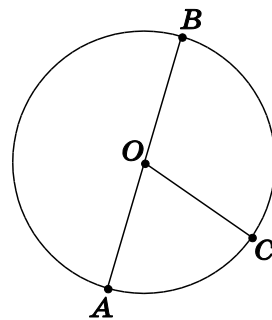


Рис. 59

Вариант 2

1. Через точку A , взятую на окружности с центром O , проведена касательная к окружности. На этой касательной взята точка B так, что $AB = 5$. Найдите расстояние от центра окружности до точки B , если радиус равен 12.
2. В треугольнике MNK $MN = 12$, $NK = 15$, $MK = 20$. Проведена окружность с центром в точке M радиуса MN . Сколько общих точек имеет прямая NK с этой окружностью?
3. В окружности с центром O проведён диаметр PK и радиус OM (рис. 60). Используя их, постройте две пересекающиеся касательные и две параллельные касательные.

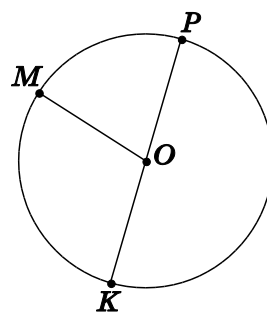


Рис. 60

Вариант 3

1. В треугольнике ABC $AB = 35$, $AC = 28$, $BC = 21$. Проведена окружность с центром в точке C и касающаяся прямой AB . Найдите радиус этой окружности.
2. Через точку M , взятую вне круга с центром O , проведены три прямые: касательная, секущая, проходящая через центр круга, и прямая, перпендикулярная касательной. Найдите расстояния от центра круга до каждой из прямых, если $OM = 10$, а синус угла между касательной и секущей равен 0,6. Имеет ли третья прямая общие точки с окружностью?

Вариант 4

1. В треугольнике ABC $AB = 12$, $AC = 16$, $BC = 20$. Проведена окружность с центром в точке C и касающаяся прямой AB . Найдите радиус этой окружности.
2. Через точку M , взятую вне круга с центром O , проведены три прямые: касательная, секущая, проходящая через центр круга, и прямая, перпендикулярная касательной. Найдите расстояния от центра круга до каждой из прямых, если $OM = 20$, а синус угла между касательной и секущей равен $0,8$. Имеет ли третья прямая общие точки с окружностью?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 26 (11.3).

ГРАДУСНАЯ МЕРА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Вариант 1

1. В окружности проведены два диаметра. Один из углов, образовавшихся при их пересечении, равен 42° . Найдите градусные меры дуг, образовавшихся на окружности.
2. Окружность разбита на n равных частей. Определите градусную меру каждой из получившихся дуг, если $n = 3$; $n = 5$; $n = 6$.
3. Найдите отношение градусных мер угла B и дуги AC (рис. 61), если угол BOC равен 140° .

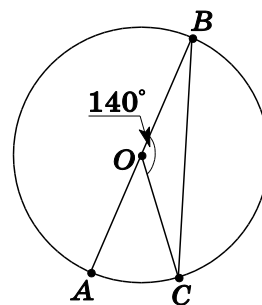


Рис. 61

Вариант 2

1. В окружности проведены два диаметра. Один из углов, образовавшихся при их пересечении, равен 108° . Найдите градусные меры дуг, образовавшихся на окружности.
2. Окружность разбита на n равных частей. Определите градусную меру каждой из получившихся дуг, если $n = 2$; $n = 4$; $n = 10$.
3. Найдите отношение градусных мер угла P и дуги MK (рис. 62), если угол MOP равен 40° .

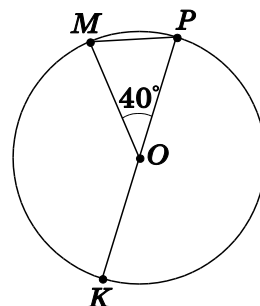


Рис. 62

Вариант 3

1. В окружности проведены три диаметра, два из которых взаимно перпендикулярны, а два образуют угол в 32° . Найдите градусные меры дуг, образовавшихся на окружности.
2. Окружность разбита на n равных частей. Определите градусную меру каждой из получившихся дуг, если $n = 3$; $n = 10$; $n = 20$.
3. Выясните величину угла KPM , если дуга MK составляет 140° (рис. 63).

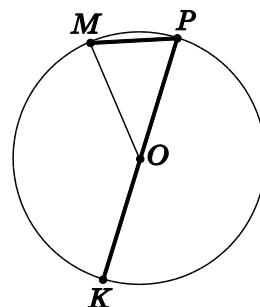


Рис. 63

Вариант 4

1. В окружности проведены три диаметра, два из которых взаимно перпендикулярны, а два образуют угол в 52° . Найдите градусные меры дуг, образовавшихся на окружности.
2. Окружность разбита на n равных частей. Определите градусную меру каждой из получившихся дуг, если $n = 4$; $n = 5$; $n = 18$.
3. Выясните величину угла ABC , если дуга AC составляет 64° (рис. 64).

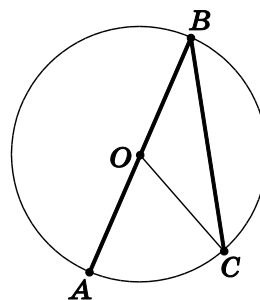


Рис. 64

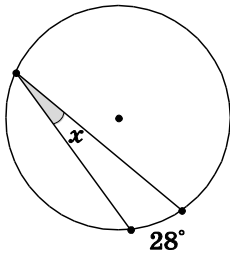
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 27 (11.4).

ИЗМЕРЕНИЕ ВПИСАННЫХ УГЛОВ

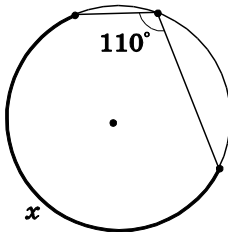
Вариант 1

1. По данным рисунка 65 в случаях 1 — 6 найдите x .

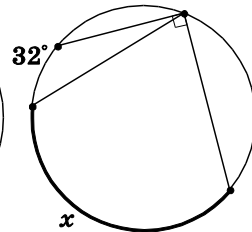
1)



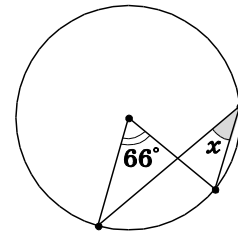
2)



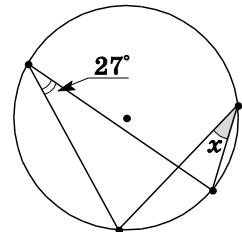
3)



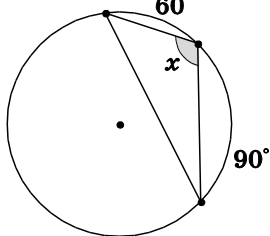
4)



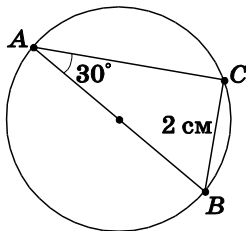
5)



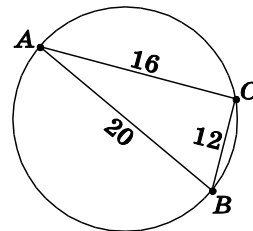
6)



7)



8)



9)

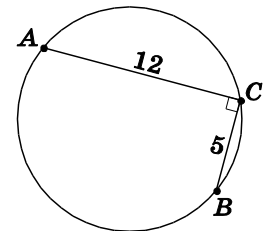


Рис. 65

2. По данным рисунка 65 в случаях 7 — 9 найдите радиус окружности и объясните свой ответ.

Вариант 2

1. По данным рисунка 66 в случаях 1 — 6 найдите x .

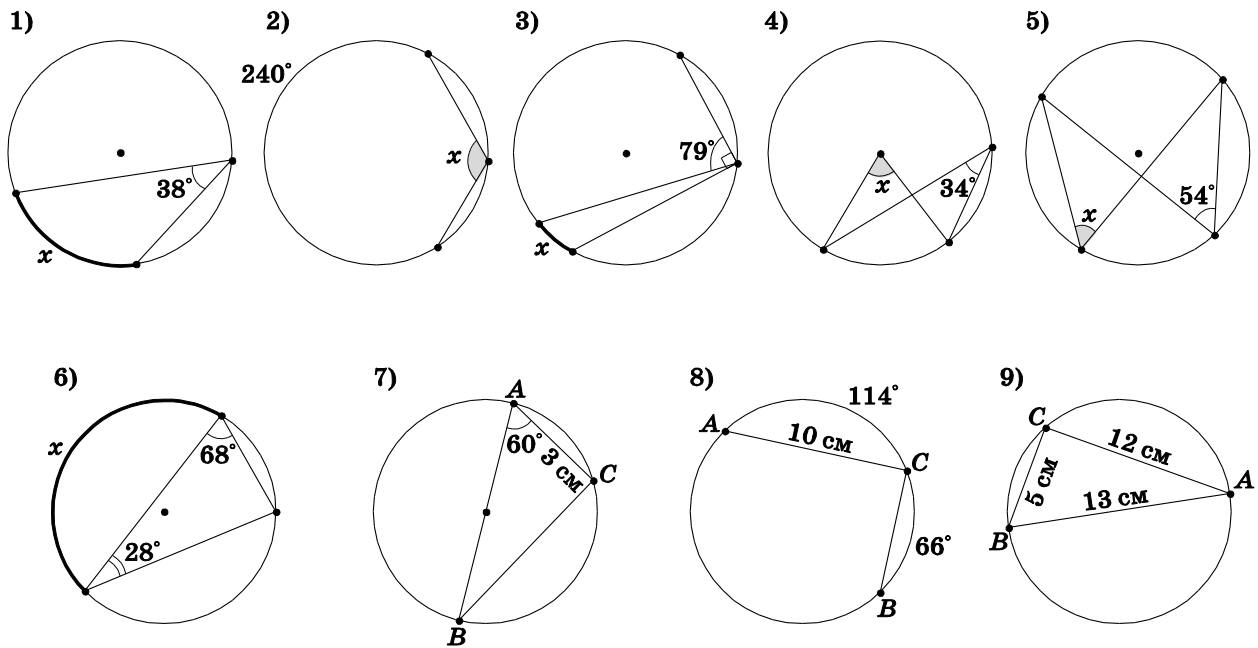


Рис. 66

2. По данным рисунка 66 в случаях 7 — 9 найдите радиус окружности и объясните свой ответ.

Вариант 3

1. По данным рисунка 67 в случаях 1 — 6 найдите x .

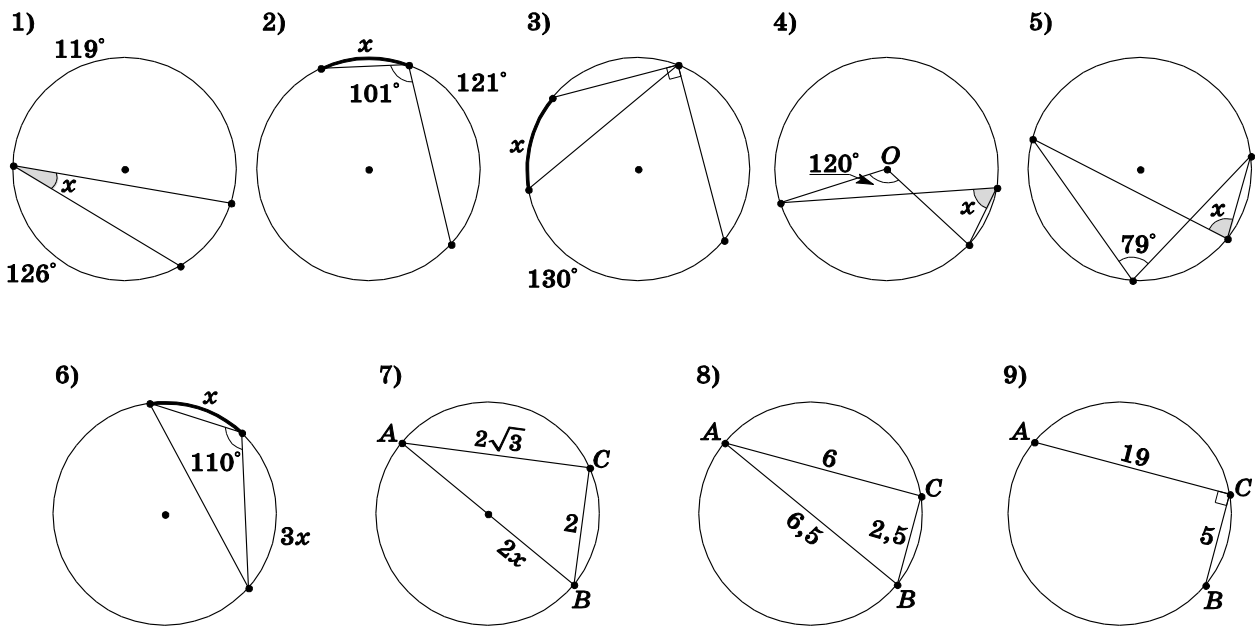


Рис. 67

2. По данным рисунка 67 в случаях 7 — 9 найдите радиус окружности и объясните свой ответ.

Вариант 4

1. По данным рисунка 68 в случаях 1 — 6 найдите x .

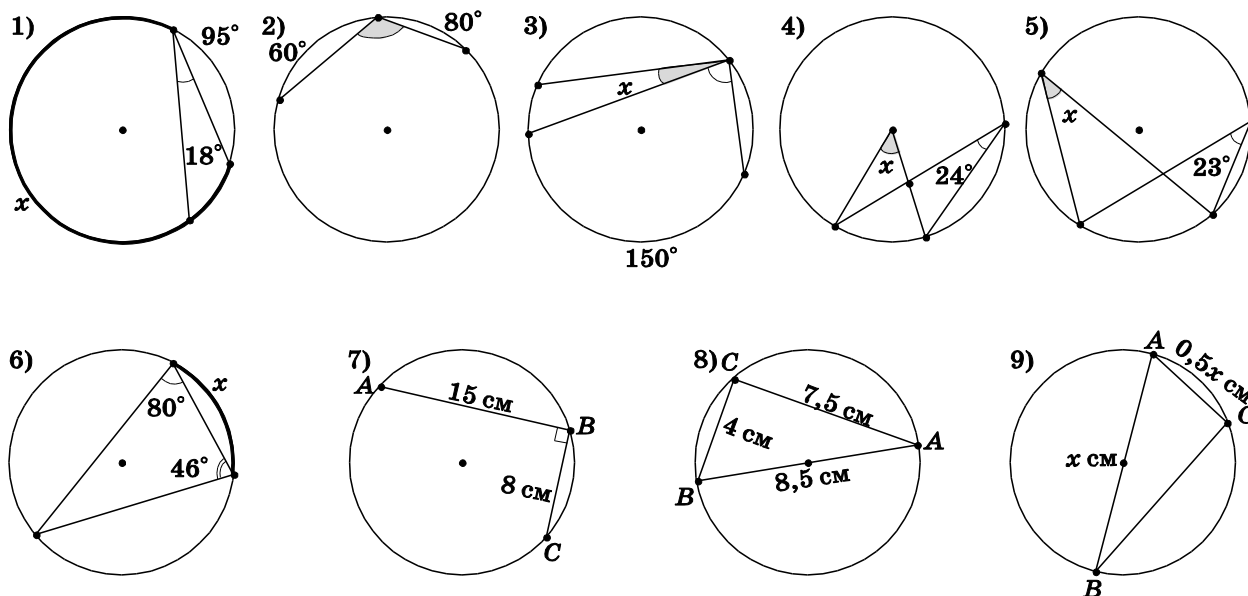


Рис. 68

2. По данным рисунка 68 в случаях 7 — 9 найдите радиус окружности и объясните свой ответ.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 28 (11.4).

ИЗМЕРЕНИЕ ВПИСАННЫХ УГЛОВ

Вариант 1

- Начертите окружность радиуса 2 см и проведите в ней диаметр AB и хорду AC , стягивающую дугу AC в 68° . Путём вычислений найдите длину хорды AC с точностью до 0,1. Результаты сравните с результатами измерения.
- Выразите длину хорды AB через a и R (рис. 69).

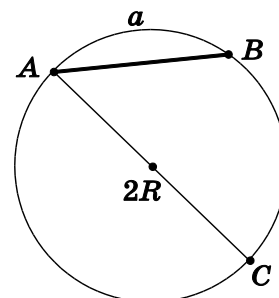


Рис. 69

Вариант 2

1. Начертите окружность радиуса 2 см и проведите в ней диаметр AB и хорду AC , стягивающую дугу AC в 92° . Путём вычислений найдите длину хорды AC с точностью до 0,1. Результаты сравните с результатами измерения.
2. Выразите длину хорды MK через f и R (рис. 70).

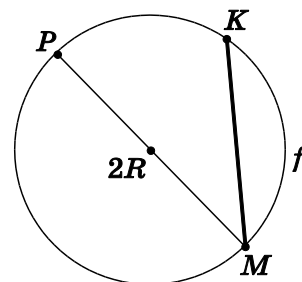


Рис. 70

Вариант 3

1. Начертите окружность радиуса 2 см и проведите в ней диаметр AB и хорду AC , стягивающую дугу AC в 108° . Путём вычислений найдите длину хорды AC с точностью до 0,1. Результаты сравните с результатами измерения.
2. Выразите длину хорды PE через d и R (рис. 71).

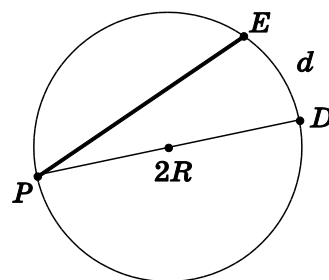


Рис. 71

Вариант 4

1. Начертите окружность радиуса 2 см и проведите в ней диаметр AB и хорду AC , стягивающую дугу AC в 112° . Путём вычислений найдите длину хорды AC с точностью до 0,1. Результаты сравните с результатами измерения.
2. Выразите длину хорды CA через k и R (рис. 72).

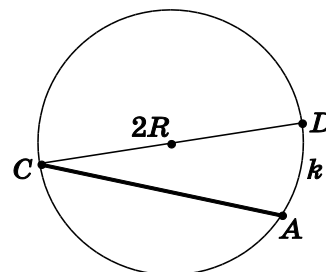


Рис. 72

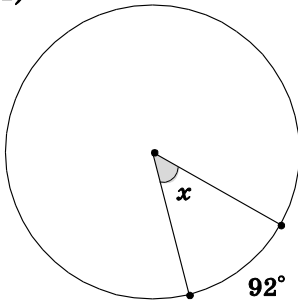
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 29 (11.4).

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ОКРУЖНОСТЬЮ

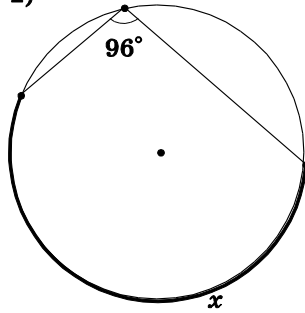
Вариант 1

По данным рисунка 73 определите значения неизвестной величины.

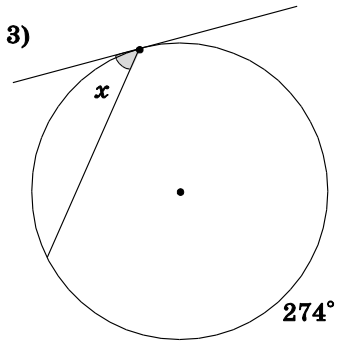
1)



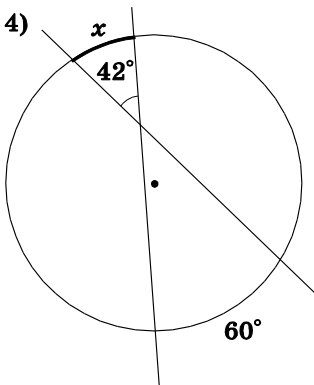
2)



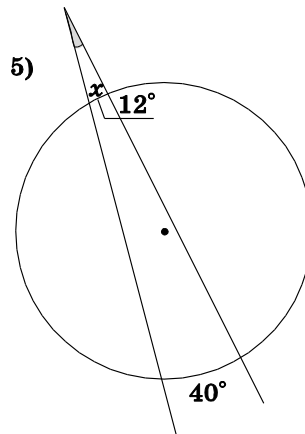
3)



4)



5)



6)

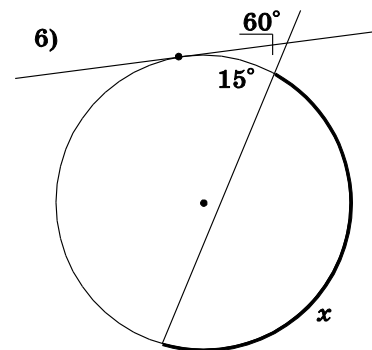
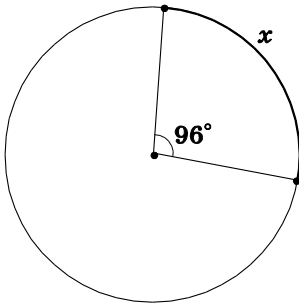


Рис. 73

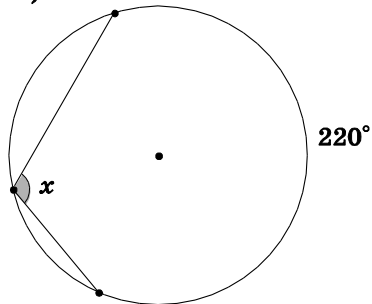
Вариант 2

По данным рисунка 74 определите значения неизвестной величины.

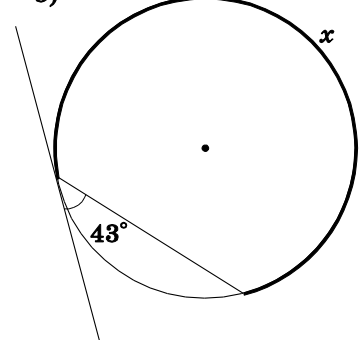
1)



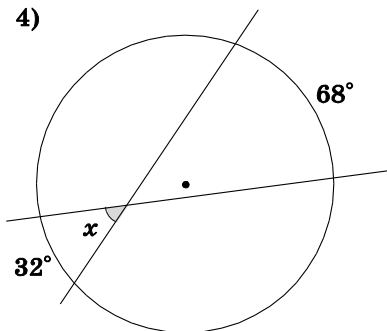
2)



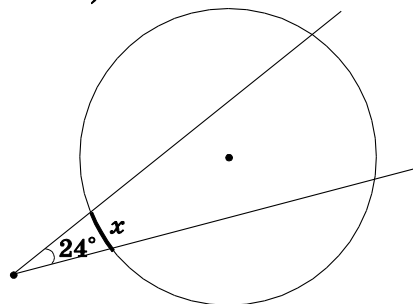
3)



4)



5)



6)

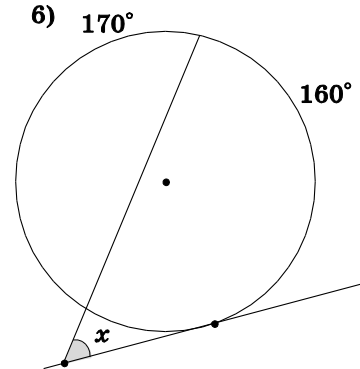
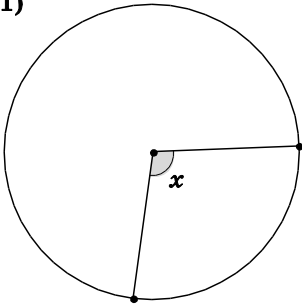


Рис. 74

Вариант 3

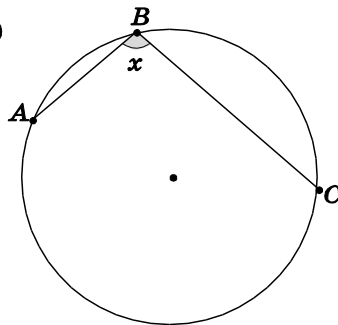
По данным рисунка 75 определите значения неизвестной величины.

1)



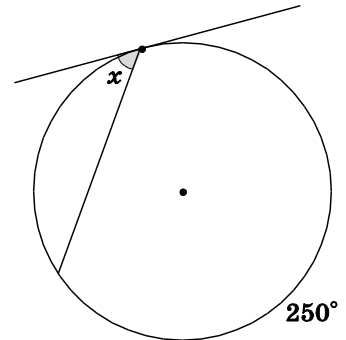
Отношение дуг равно 4:11

2)

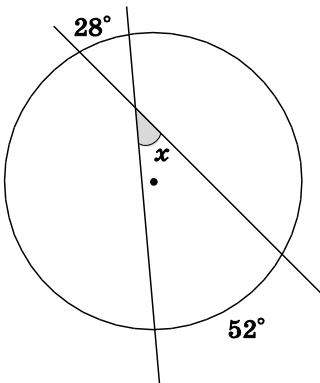


$\cup AB : \cup BC : \cup CA = 1:3:5$

3)



4)



5)

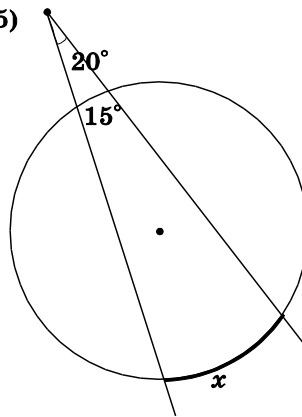
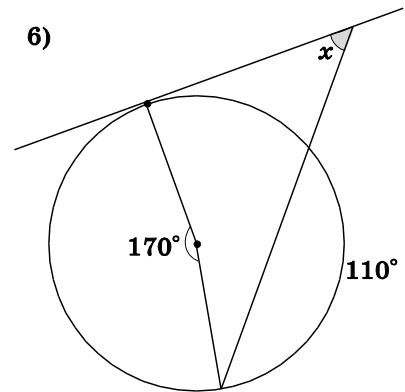


Рис. 75

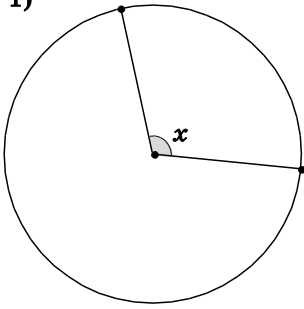
6)



Вариант 4

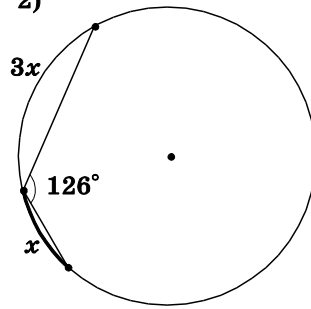
По данным рисунка 76 определите значения неизвестной величины

1)

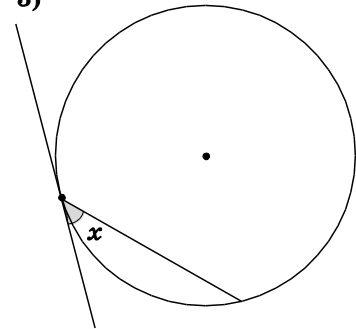


Отношение дуг равно 7:3

2)

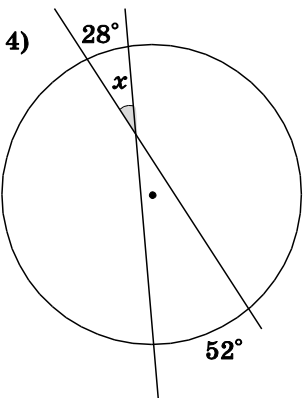


3)

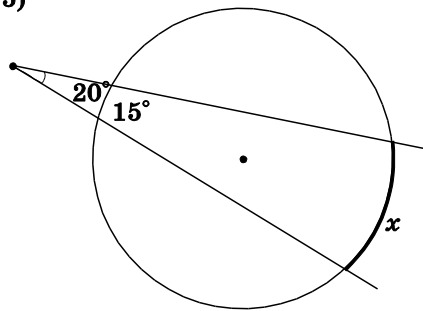


Меньшая дуга составляет 2/7 от большей

4)



5)



6)

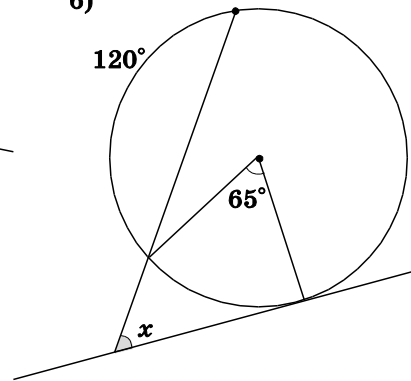


Рис. 76

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 30 (11.5).

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ

Вариант 1

Для каждого из рисунков 77 — 79 найдите значение x .

1) $CK = 2$, $DK = 8$, $KB = 4$, $AK = x$ (рис. 77).

2) $AP = 10$, $PB = 8$, $CP : DP = 3 : 5$, $CD = x$ (рис. 78).

3) $CD \perp AB$, $CP = 1$, $PD = 9$, $AP = x$ (рис. 79).

4) $\angle AC = 70^\circ$, $\angle DB = 170^\circ$, $AM = 3,5$, $MB = 2$, $CM = \frac{1}{8}CD$. Докажите, что

$$BD = \sqrt{67} \text{ (рис. 80).}$$

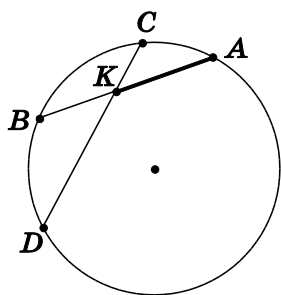


Рис. 77

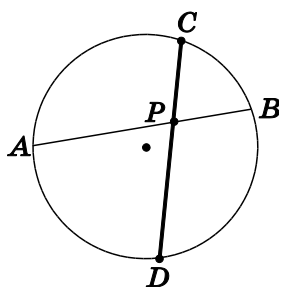


Рис. 78

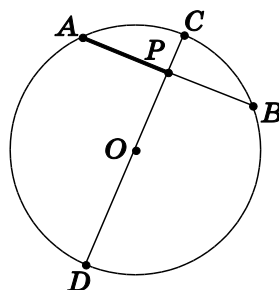


Рис. 79

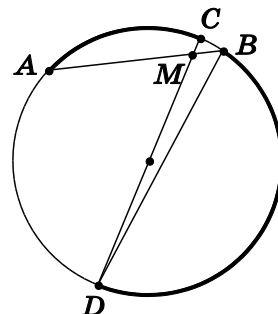


Рис. 80

Вариант 2

Для каждого из рисунков 81 — 83 найдите значение x .

1) $BK = 2$, $KA = 6$, $CK = 3$, $KD = x$ (рис. 81).

2) $AP : PB = 4 : 3$, $CP = 4$, $DP = 12$, $AP = x$ (рис. 82).

3) $CD \perp AB$, $PB = x$, $CP = 0,2CD$, $CD = 10$, $AP = x$ (рис. 83).

4) $\angle AC = 80^\circ$, $\angle DB = 160^\circ$, $CM = 2$, $MD = 10$, $BM = 0,8AM$. Докажите, что $AC = \sqrt{28}$ (рис. 84).

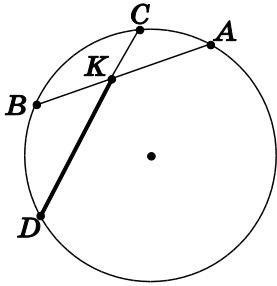


Рис. 81

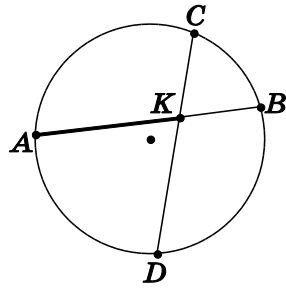


Рис. 82

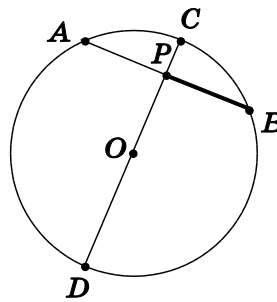


Рис. 83

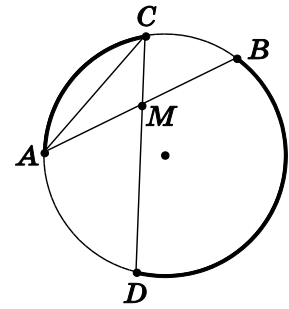


Рис. 84

Вариант 3

Для каждого из рисунков 85 — 87 найдите значение x .

1) $BK = 4$, $KA = 10$, KD больше CK на 3, $CK = x$ (рис. 85).

2) $AP = 12$, $PB = 4$, $CP : DP = 1,5 : 2$, $CD = x$ (рис. 86).

3) $CD \perp AB$, $CP = x$, $AB = 12$, $BD = \sqrt{65}$ (рис. 87).

4) $\angle CD = 30^\circ$, $\angle AD = 90^\circ$, $AM = 6$, $MB = 4$, $CM = \frac{3}{8}CD$. Докажите, что

$$AD = \sqrt{52} \text{ (рис. 88).}$$

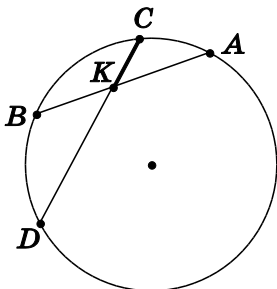


Рис. 85

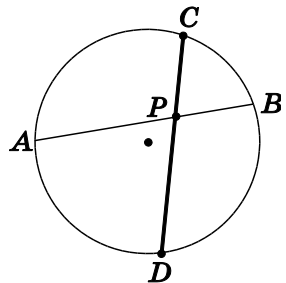


Рис. 86

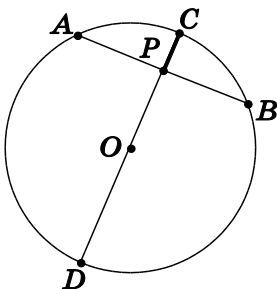


Рис. 87

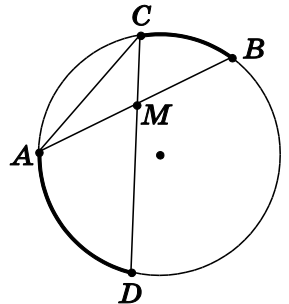


Рис. 88

Вариант 4

Для каждого из рисунков 89 — 91 найдите значение x .

1) $CK = 4$, $DK = 9$, AK меньше KB на 7, $AK = x$ (рис. 89).

2) $AP = 9$, $CD = 21$, $CP : DP = 1 : 6$, $PB = x$ (рис. 90).

3) $CD \perp AB$, $AC = 13$, $CP = 5$, $AP = x$ (рис. 91).

4) $\angle CB = 40^\circ$, $\angle DA = 80^\circ$, $CM = 4$, $MD = 10$, $AM : MD = 4 : 2,5$. Докажите, что

$$CB = \sqrt{21} \text{ (рис. 92).}$$

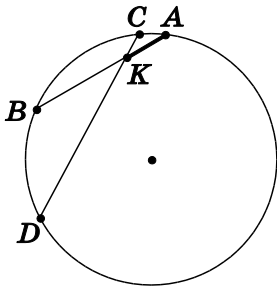


Рис. 89

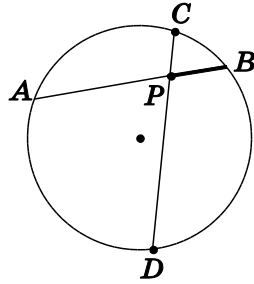


Рис. 90

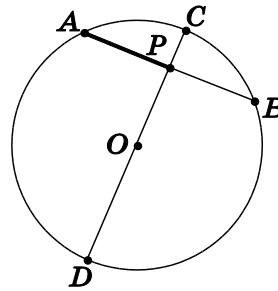


Рис. 91

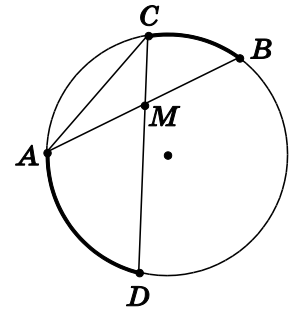


Рис. 92

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 31 (11.5).

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ

Вариант 1

1. Найдите значение x , если $PA = 3$, $PB = 8$, $PC = x$, $PD = 12$ (рис. 93).
2. Из точки P к окружности проведены касательная PA и секущая PCD так, что $PC = 3$, $CD = 9$, $\angle AC = 40^\circ$, $\angle AD = 160^\circ$ (рис. 94). Найдите периметр и площадь треугольника APD .

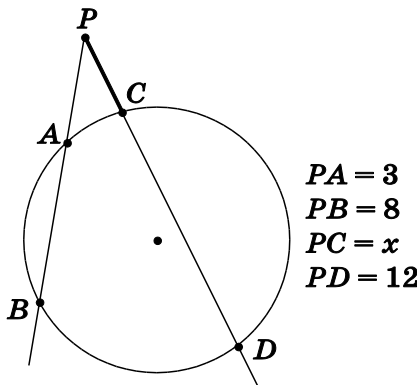


Рис. 93

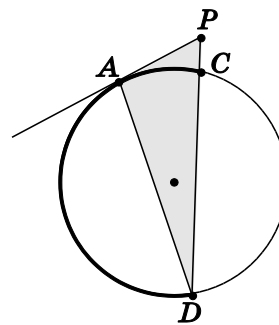


Рис. 94

Вариант 2

1. Найдите значение x , если $PA = x$, $PB = 16$, $PC = 4$, $PD = 12$ (рис. 95).
2. Из точки K к окружности проведены касательная KP и секущая KCD так, что $KP = 6$, $KC = 3$, $\angle PC = 42^\circ$, $\angle PD = 162^\circ$ (рис. 96). Найдите периметр и площадь треугольника KPD .

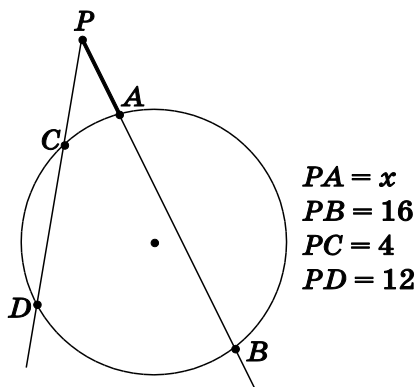


Рис. 95

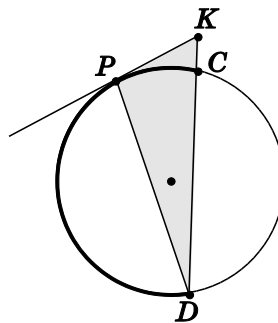


Рис. 96

Вариант 3

1. Найдите значение x , если $PA = 3$, $PB = 16$, $PC = 4$, $PD = x$ (рис. 97).
2. Из точки A к окружности проведены касательная AB и секущая ACD так, что $AC = 6$, $CD = 18$, $\angle BAC = 48^\circ$, $\angle BDC = 168^\circ$ (рис. 98). Найдите периметр и площадь треугольника ABD и $\sin \angle ABD$.

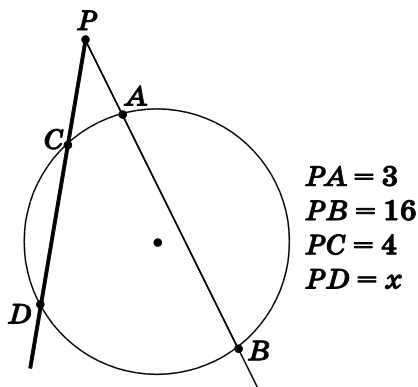


Рис. 97

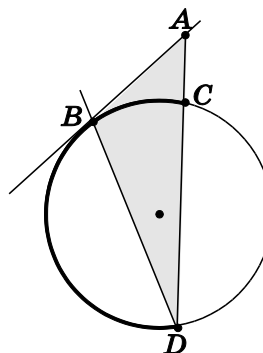


Рис. 98

Вариант 4

1. Найдите значение x , если $PA = 6$, $PB = 14$, $PC = 4$, $PD = x$ (рис. 99).
2. Из точки M к окружности проведены касательная MK и секущая MPC так, что $MP = 9$, $PC = 27$, $\angle KMP = 38^\circ$, $\angle KMC = 158^\circ$ (рис. 100). Найдите периметр и площадь треугольника KMC и $\sin \angle KMC$.

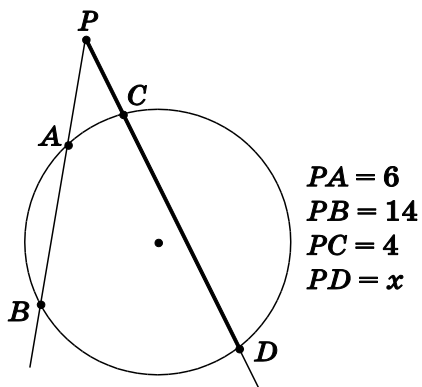


Рис. 99

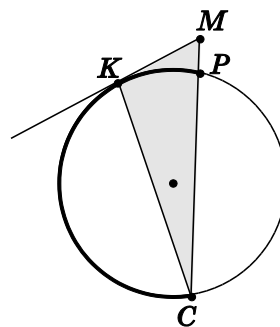


Рис. 100

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 32 (12.1).

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ВОКРУГ МНОГОУГОЛЬНИКА

Вариант 1

- Начертите три окружности и впишите в них:
 - равнобедренный треугольник;
 - четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны;
 - любой пятиугольник.
- Начертите тупоугольный разносторонний треугольник и опишите вокруг него окружность.

Вариант 2

- Начертите три окружности и впишите в них:
 - прямоугольный треугольник;
 - четырёхугольник, у которого две соседние стороны равны;
 - любой шестиугольник.
- Начертите остроугольный разносторонний треугольник и опишите вокруг него окружность.

Вариант 3

1. Начертите три окружности и впишите в них:
 - а) треугольник, одна из сторон которого — диаметр окружности. Какого вида этот треугольник?
 - б) четырёхугольник, у которого одна из диагоналей является диаметром;
 - в) пятиугольник, у которого есть прямой угол, а стороны, образующие его, равны.
2. Начертите тупоугольный равнобедренный треугольник и опишите вокруг него окружность.

Вариант 4

1. Начертите три окружности и впишите в них:
 - а) тупоугольный равнобедренный треугольник;
 - б) четырёхугольник, у которого один из углов равен 60° . Чему равна градусная мера противолежащего ему угла?
 - в) шестиугольник, у которого три стороны равны.
2. Начертите остроугольный равнобедренный, но не равносторонний треугольник и опишите вокруг него окружность.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 33 (12.1).

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ВОКУГ МНОГОУГОЛЬНИКА

Вариант 1

По данным рисунка 101 в каждом случае определите радиус окружности.

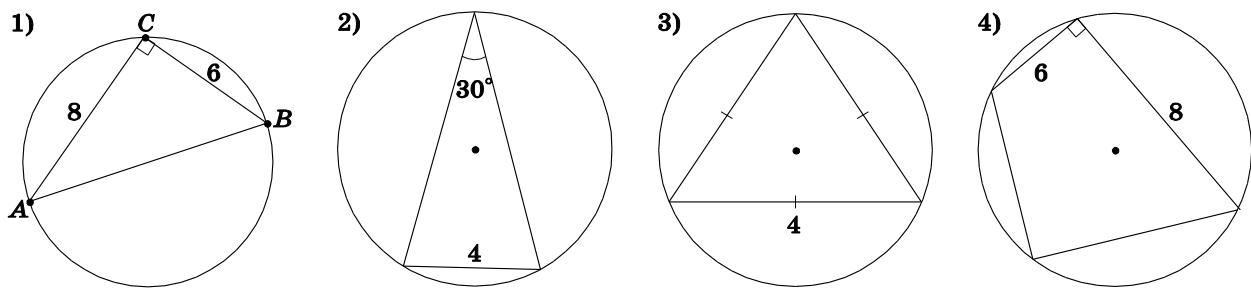


Рис. 101

Вариант 2

По данным рисунка 102 в каждом случае определите радиус окружности.

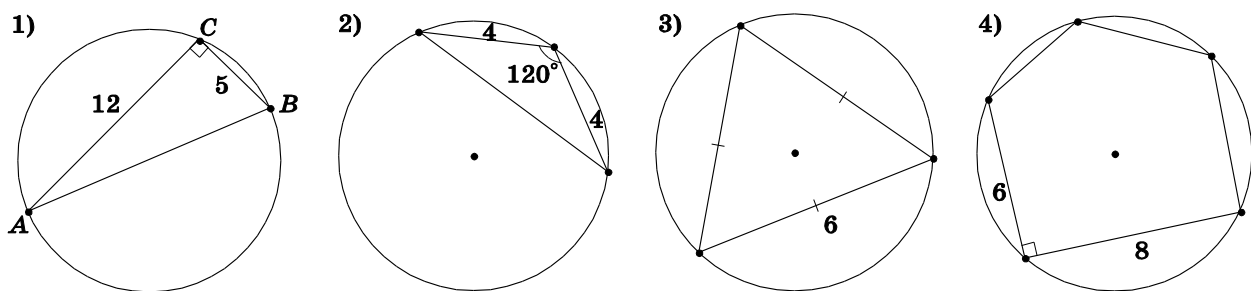


Рис. 102

Вариант 3

По данным рисунка 103 в случаях 1, 2 и 4 определите радиусы окружностей, а в случае 3 найдите значение x .

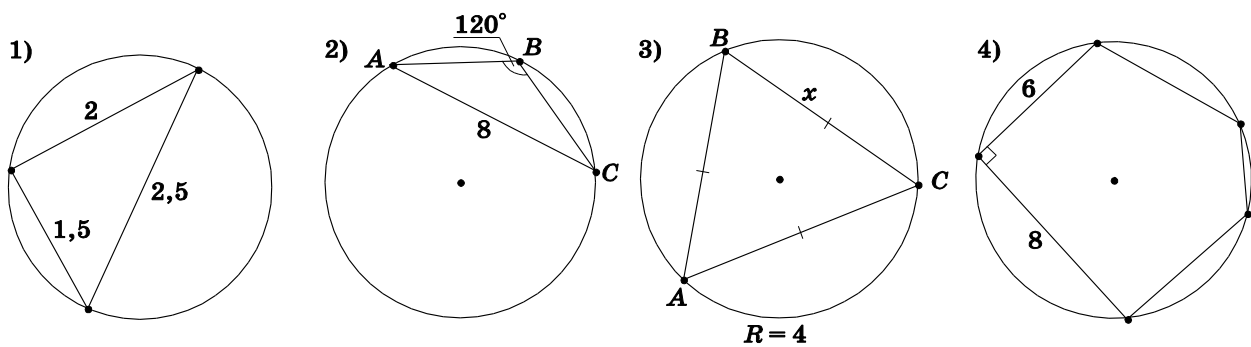


Рис. 103

Вариант 4

По данным рисунка 104 в случаях 1, 2 и 4 определите радиусы окружностей, а в случае 3 найдите значение x .

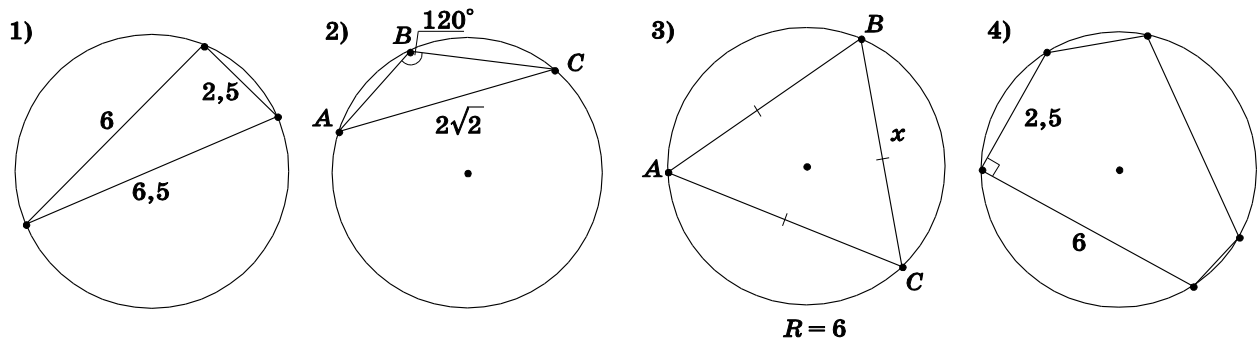


Рис. 104

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 34 (12.1).

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ВОКУГ МНОГОУГОЛЬНИКА

Вариант 1

1. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см.
2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если сторона треугольника равна $2\sqrt{2}$ см, а углы, прилежащие к этой стороне, равны 72° и 63° .
3. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если две стороны этого треугольника равны 6 см и 8 см, а угол, заключённый между ними, равен 60° .

Вариант 2

1. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если стороны треугольника 10 см, 14 см и 12 см.
2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если сторона треугольника равна $4\sqrt{2}$ см, а углы, прилежащие к этой стороне, равны 83° и 52° .
3. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если две стороны этого треугольника равны 6 см и 8 см, а угол, заключённый между ними, равен 120° .

Вариант 3

1. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если стороны треугольника 18 см, 24 см и 30 см.
2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если сторона треугольника равна $10\sqrt{3}$ см, а углы, прилежащие к этой стороне, равны 23° и 37° .
3. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если две стороны этого треугольника равны $2\sqrt{2}$ см и 3 см, а угол, заключённый между ними, равен 135° .

Вариант 4

1. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если стороны треугольника 10 см, 24 см и 26 см.
2. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если сторона треугольника равна $10\sqrt{2}$ см, а углы, прилежащие к этой стороне, равны 23° и 22° .
3. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если две стороны этого треугольника равны 4 см и 8 см, а угол, заключённый между ними, равен 120° .

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 35 (12.2).

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В МНОГОУГОЛЬНИК

Вариант 1

1. Выберите на окружности три точки и, проведя через них касательные, получите треугольник, описанный вокруг окружности.
2. В окружности проведите два диаметра, а через их концы проведите касательные. Получите четырёхугольник, описанный вокруг окружности.
3. Начертите остроугольный разносторонний треугольник и впишите в него окружность.

Вариант 2

1. Выберите на окружности четыре точки и, проведя через них касательные, получите четырёхугольник, описанный вокруг окружности.
2. Проведите три касательных к окружности так, чтобы получился прямоугольный треугольник, описанный вокруг окружности.
3. Начертите тупоугольный разносторонний треугольник и впишите в него окружность.

Вариант 3

1. Начертите окружность. Опишите вокруг неё равнобедренный, но не равносторонний треугольник.
2. Начертите окружность. Опишите вокруг неё прямоугольную трапецию.
3. Начертите прямоугольный разносторонний треугольник и впишите в него окружность.

Вариант 4

1. Начертите окружность. Опишите вокруг неё параллелограмм. Определите вид этого параллелограмма.
2. Начертите окружность. Опишите вокруг неё тупоугольный треугольник.
3. Начертите остроугольный разносторонний треугольник и впишите в него окружность.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 36 (12.2).

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Вариант 1

1. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Опишите вокруг него окружность и впишите в него окружность. Вычислите радиусы обеих окружностей. Результаты проверьте измерением.
2. Сторона ромба равна 10 см, а острый угол равен 30° . Чему равен диаметр окружности, вписанной в этот ромб?

Вариант 2

1. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 4,5 см. Опишите вокруг него окружность и впишите в него окружность. Вычислите радиусы обеих окружностей. Результаты проверьте измерением.
2. Сторона ромба равна $10\sqrt{3}$ см, а острый угол равен 60° . Чему равен диаметр окружности, вписанной в этот ромб?

Вариант 3

1. Постройте равнобедренный треугольник со сторонами 5 см, 5 см и 8 см. Опишите вокруг него окружность и впишите в него окружность. Вычислите радиусы обеих окружностей. Результаты проверьте измерением.
2. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Чему равен диаметр окружности, вписанной в этот ромб?

Вариант 4

1. Постройте равнобедренный треугольник со сторонами 2,5 см, 8 см и 2,5 см. Опишите вокруг него окружность и впишите в него окружность. Вычислите радиусы обеих окружностей. Результаты проверьте измерением.
2. Диагонали ромба равны 8 см и 6 см. Чему равен диаметр окружности, вписанной в этот ромб?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 37 (12.1, 12.2).

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Вариант 1

1. Стороны параллелограмма равны 5 см и 12 см. Известно, что вокруг этого параллелограмма можно описать окружность. Найдите площадь этого параллелограмма.
2. Сторона параллелограмма равна 5 см, а высота, проведённая к этой стороне, равна 4 см. Известно, что в этот параллелограмм можно вписать окружность. Определите синус острого угла этого параллелограмма.

Вариант 2

1. Стороны параллелограмма равны 5 см и 12 см. Известно, что вокруг этого параллелограмма можно описать окружность. Найдите длины диагоналей этого параллелограмма.
2. Сторона параллелограмма равна 5 см, а высота, проведённая к этой стороне, равна 3 см. Известно, что в этот параллелограмм можно вписать окружность. Определите синус острого угла этого параллелограмма.

Вариант 3

1. Основания трапеции 2 см и 10 см. Одна из боковых сторон равна 5 см. Известно, что вокруг этой трапеции можно описать окружность. Найдите высоту этой трапеции и синусы тупых углов при основании.
2. Сторона параллелограмма равна 10 см, а высота, проведённая к этой стороне, равна 8 см. Известно, что в этот параллелограмм можно вписать окружность. Определите тангенс острого угла этого параллелограмма.

Вариант 4

1. Основания равнобедренной трапеции 4 см и 16 см. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность. Найдите высоту этой трапеции и косинусы тупых углов при основании.
2. Сторона параллелограмма равна 8 см, а высота, проведённая к этой стороне, равна 6 см. Известно, что вокруг этого параллелограмма можно описать окружность. Определите синус угла между его диагоналями.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 38 (13.1).

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

Вариант 1

1. Вокруг равнобедренного треугольника со сторонами 5 см, 5 см и 8 см описана окружность. Найдите длину этой окружности.
2. В прямоугольной трапеции основания 6 см и 12 см, а бóльшая из боковых сторон 10 см. Можно ли вокруг такой трапеции описать окружность? Если да, то найдите длину окружности.

Вариант 2

1. В равнобедренный треугольник со сторонами 10 см, 10 см и 12 см вписана окружность. Найдите длину этой окружности.
2. В прямоугольной трапеции основания 3 см и 6 см, а бо́льшая из боковых сторон 5 см. Можно ли вокруг такой трапеции описать окружность? Если да, то найдите длину окружности.

Вариант 3

1. В равнобедренный треугольник со сторонами 13 см, 13 см и 10 см вписана окружность. Найдите длину этой окружности.
2. Вокруг окружности описана прямоугольная трапеция с основаниями 6 см и 12 см. Найдите длину окружности.

Вариант 4

1. В равнобедренный треугольник со сторонами 2,5 см, 2,5 см и 4 см вписана окружность. Найдите длину этой окружности.
2. Вокруг окружности описана прямоугольная трапеция с основаниями 3 см и 6 см. Найдите длину окружности.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 39 (13.2).

ДЛИНА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

Вариант 1

1. Определите длину дуги AB окружности с центром в точке O радиуса R и с углом AOB , равным α , если:
 - а) $R = 1$ см, $\alpha = 60^\circ$;
 - б) $R = 1,5$ см, $\alpha = 90^\circ$;
 - в) $R = 2$ см, $\alpha = 40^\circ$.
2. В треугольнике MNK $MN = 2\sqrt{2}$, $MK = 2\sqrt{2}$, $NK = 4$. Вокруг треугольника MNK описана окружность. Найдите длину меньшей дуги MN .

Вариант 2

1. Определите длину дуги MN окружности с центром в точке O радиуса R и с углом MON , равным α , если:
 - а) $R = 2$ см, $\alpha = 45^\circ$;
 - б) $R = 2,5$ см, $\alpha = 90^\circ$;
 - в) $R = 3$ см, $\alpha = 20^\circ$.
2. В треугольнике ABC $AC = \sqrt{18}$, $BC = \sqrt{18}$, $AB = 6$. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Найдите длину меньшей дуги BC .

Вариант 3

1. Определите длину дуги KP окружности с центром в точке O радиуса R и с углом KOP , равным α , если:
 - а) $R = 1,5$ см, $\alpha = 135^\circ$;
 - б) $R = 3$ см, $\alpha = 70^\circ$.
2. В треугольнике ABC $AB = 2\sqrt{7}$, $BC = 4$, $AC = 6$. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Найдите длину меньшей дуги AB .

Вариант 4

1. Определите длину дуги KP окружности с центром в точке O радиуса R и с углом KOP , равным α , если:
а) $R = 3$ см, $\alpha = 120^\circ$;
б) $R = 1,5$ см, $\alpha = 70^\circ$.
2. В треугольнике MNK $MN = \sqrt{10}$, $MK = 3\sqrt{2}$, $KN = 4$. Вокруг треугольника MNK описана окружность. Найдите длину меньшей дуги MN .

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА № 40 (13.3).

ПЛОЩАДЬ КРУГА

Вариант 1

По данным рисунка 105 выразите через R площади заштрихованных фигур (выразив, вычислите при $R = 2$ см):

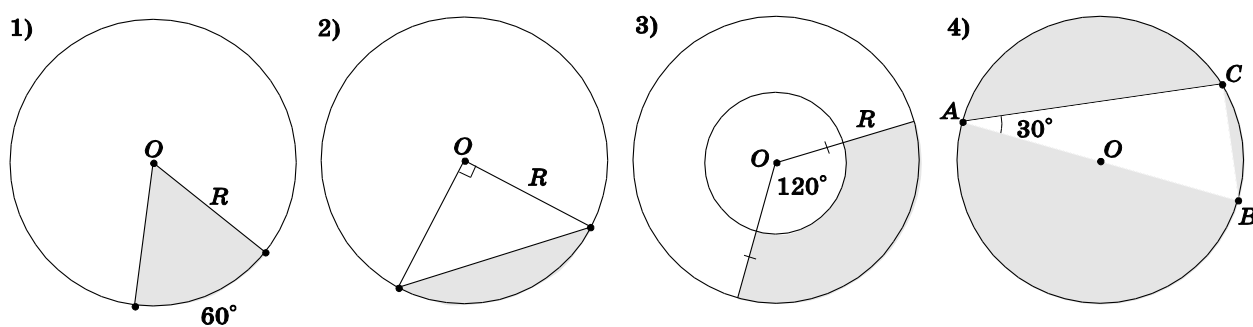


Рис. 105

Вариант 2

По данным рисунка 106 выразите через R площади заштрихованных фигур (выразив, вычислите при $R = 4$ см).

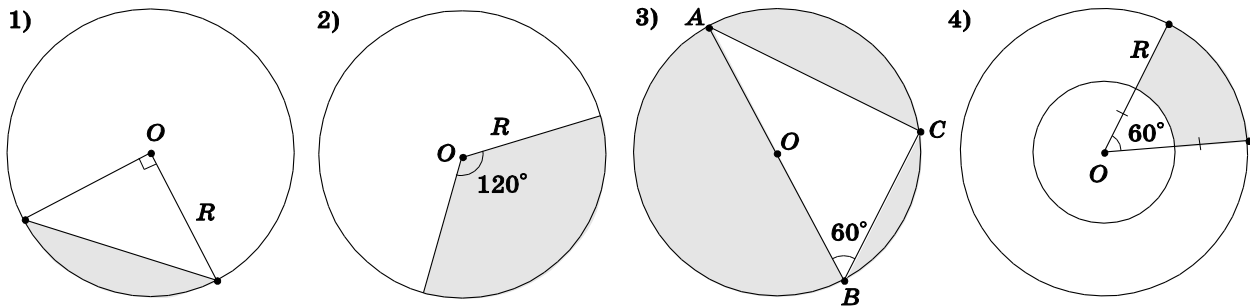


Рис. 106

Вариант 3

По данным рисунка 107 выразите через R площади заштрихованных фигур (выразив, вычислите при $R = 4$ см). В случае 4 (см. рис. 107) изображён ромб, сторона которого равна a . При вычислении воспользуйтесь значением $a = 2,5R$.

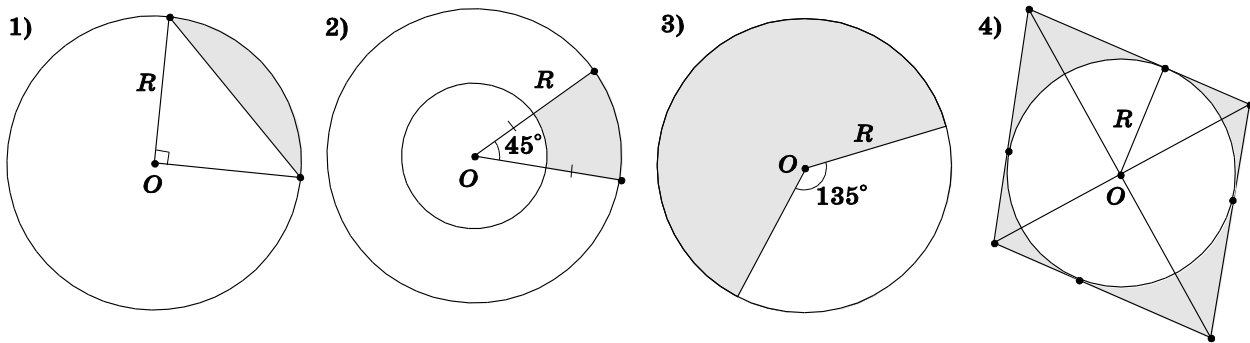


Рис. 107

Вариант 4

По данным рисунка 108 выразите через R площади заштрихованных фигур (выразив, вычислите при $R = 2$ см). В случае 4 (см. рис. 108) изображён равнобедренный прямоугольный треугольник, сторона которого равна a . При вычислении воспользуйтесь значением $a = 3R$.

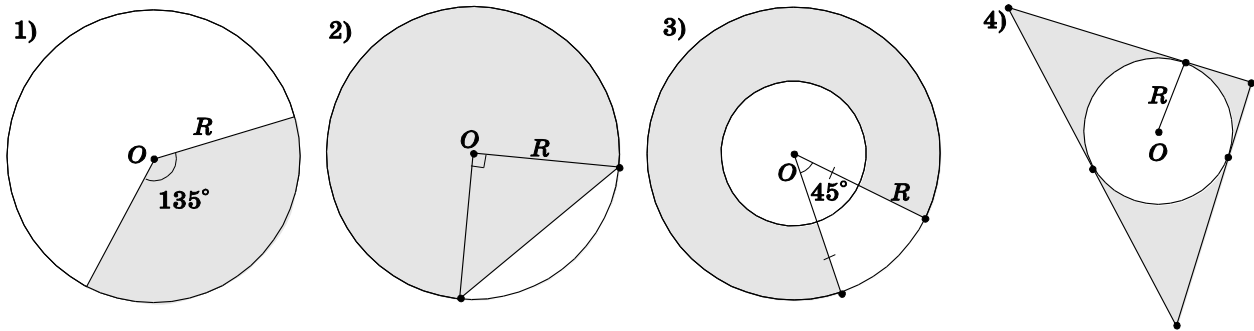


Рис. 108

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. CD и AB — две параллельные хорды окружности, M — середина хорды CD . Докажите что диаметр, проведённый через M , разделяет хорду AB пополам.
2. В окружности с центром O проведены четыре радиуса OA , OB , OC и OD так, что угол AOB равен 60° , а угол COD прямой. Какая из хорд AB или CD больше и во сколько раз? Какая из хорд AB или CD ближе к центру окружности?
3. Через точки A и B окружности с центром в точке O (угол AOB равен 120°) проведены касательные к окружности. Под каким углом пересекаются эти касательные?
4. Две взаимно перпендикулярные хорды окружности имеют длины 5 и 12. Найдите радиус окружности.
5. Концы двух диаметров окружности последовательно соединены между собой. Определите вид получившегося четырёхугольника.
6. Через концы двух диаметров проведены четыре касательные до взаимного пересечения. Определите вид получившегося четырёхугольника.
7. В окружности проведены две параллельные, но не равные между собой хорды. Докажите, что их концы являются вершинами равнобедренной трапеции.
8. В прямоугольном треугольнике катеты равны a и b , а гипотенуза равна c . Докажите, что радиус вписанной окружности $r = \frac{a + b - c}{2}$.
9. Найдите отношение площадей кругов описанного вокруг и вписанного в данный прямоугольный треугольник, если периметр треугольника равен 50, а радиус вписанного круга равен 5.
10. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если её средняя линия равна 24, а косинус угла при основании трапеции равен $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. (Ответ: 9.)

11. В трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана окружность с центром в точке O . $OA = 5$, $OB = 9$, $OC = 3$. Найдите площадь трапеции.
(Ответ: $\frac{576}{13}$.)
12. В четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна 12, $\sin BAC = 0,33$, $\sin ADB = 0,44$. Сумма углов BAD и BCD равна развёрнутому углу. Найдите длину стороны BC . (Ответ: 9.)

Контрольная работа №3 по теме «Геометрия круга»

Вариант 1

1. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см.

2. Сторона параллелограмма равна 5 см, а высота, проведённая к этой стороне, равна 4 см. Известно, что в этот параллелограмм можно вписать окружность. Определите синус острого угла этого параллелограмма.
3. В прямоугольной трапеции основания 6 см и 12 см, а бóльшая из боковых сторон 10 см. Можно ли вокруг такой трапеции описать окружность? Если да, то найдите длину окружности.
4. В треугольнике MNK $MN = 2\sqrt{2}$, $MK = 2\sqrt{2}$, $NK = 4$. Вокруг треугольника MNK описана окружность. Найдите длину меньшей дуги MN .

Вариант 2

1. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника, если две стороны этого треугольника равны 6 см и 8 см, а угол, заключённый между ними, равен 120° .
2. Стороны параллелограмма равны 5 см и 12 см. Известно, что вокруг этого параллелограмма можно описать окружность. Найдите длины диагоналей этого параллелограмма.
3. В прямоугольной трапеции основания 3 см и 6 см, а бóльшая из боковых сторон 5 см. Можно ли вокруг такой трапеции описать окружность? Если да, то найдите длину окружности.
4. В треугольнике ABC $AC = \sqrt{18}$, $BC = \sqrt{18}$, $AB = 6$. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Найдите длину меньшей дуги BC .

ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ПЛАНИМЕТРИИ ДЛЯ 9 КЛАССА

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 1

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике MNK угол N прямой, $\sin K = 0,25$, радиус описанной окружности равен 12,6. Найдите длину MN .
2. Найдите площадь треугольника ABC , в котором $BA = 15$, $BC = 10$,
 $\cos B = \frac{24}{25}$.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол B равен 150° , $AB = 4,2$ см, $AD = 5$ см. На диагонали BD взяты точки M и N , которые делят BD на три равные части. Найдите площадь треугольника MNA .
4. В трапеции $МКРЕ$ основания KP и ME равны 8 см и 10 см соответственно, одна из диагоналей равна 27 см. Найдите длину меньшего из отрезков, на которые она делится другой диагональю.
5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M . $BM = 4$, $MC = 6$. Найдите периметр параллелограмма.
6. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, если известно, что в эту трапецию вписана окружность, а средняя линия трапеции равна 3,8 см.
7. В треугольнике MNK угол N равен 77° , угол K равен 43° . Найдите длину стороны NK , если радиус описанной вокруг этого треугольника окружности равен $5\sqrt{3}$.
8. Из точки P , взятой вне круга, проведены касательная PA (A — точка касания) и секущая PBC (B и C — точки пересечения с окружностью). Найдите длину PA , если $PB = 9$, $BC = 7$.

9. Три точки заданы своими координатами: $A(2; 2)$, $B(3; 7)$, $C(9; 3)$. Найдите длину AA_1 — медианы треугольника ABC .

10. В трапеции $MKPE$ с основаниями KP и ME биссектрисы углов P и E пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка OP , если $OE = 4,5$, $PE = 7,5$.

ЧАСТЬ II

C1. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, если его диагонали равны между собой, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны 12 см и 16 см.

C2. В четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна 12, $\sin BAC = 0,32$, $\sin ADB = 0,48$. Сумма углов BAD и BCD равна 180° . Найдите длину стороны BC .

C3. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 3)$ и отсекающей от окружности $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ хорду длины 8.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 2

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике ABC $AB = 25$, $BC = 24$, $AC = 7$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
2. Найдите площадь треугольника MNK , в котором $MN = 5$, $NK = 10$,
 $\cos N = \frac{7}{25}$.
3. В параллелограмме $MKPE$ угол K равен 120° , $KM = 6\sqrt{3}$, $KP = 5$. На диагонали MP взяты точки A и B так, что $MA = AB = BP$. Найдите площадь треугольника MKA .
4. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O , $BC = 4,2$ см, $AD = 12,6$ см. Какую часть площади треугольника BOC составляет от площади треугольника AOD ?
5. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке K . $AD = 8$, $AK = 5$. Найдите периметр параллелограмма.
6. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Найдите длину её средней линии, если боковая сторона равна $5,6$ см.
7. В треугольнике ABC угол B равен 93° , угол C равен 57° . Найдите длину стороны BC , если радиус описанной вокруг этого треугольника окружности равен $2,6$ см.
8. В окружности хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на отрезки 9 см и 16 см. Найдите длину хорды.
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P . Найдите длину стороны AB , если $BP = 6$, $AP = 2,5$.
10. Три точки заданы своими координатами: $M(-1; -1)$, $P(0; 4)$, $K(6; 0)$.
Найдите длину MM_1 — медианы треугольника MPK .

ЧАСТЬ II

С1. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, если его диагонали равны между собой, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны 8 см и 15 см.

С2. В четырёхугольнике $KLMN$ длина стороны KL равна 8, $\sin LKM = 0,8$, длина стороны LM равна 9,6. Сумма углов KLM и MNK равна 180° . Найдите $\sin LNK$.

С3. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $B(-7; 4)$ и отсекающей от окружности $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ хорду длины 6.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 3

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике MNK угол M прямой, радиус описанной окружности равен 12,5, $MK = 20$. Найдите $\operatorname{tg} N$.
2. Найдите площадь треугольника ABC , в котором $AB = 4$, $AC = 5$, $\cos A = 0,6$.
3. В параллелограмме $MEKP$ угол E равен 135° , $KE = 4\sqrt{2}$, $KP = 3$. На диагонали PE взяты точки A и B , которые делят PE на три равные части. Найдите площадь треугольника MAB .
4. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 16 см и 20 см соответственно, одна из диагоналей равна 18 см. Найдите длину большего из отрезков, на которые она делится другой диагональю.
5. Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке M , $AM = 3$, $MD = 7$. Найдите периметр параллелограмма.
6. Найдите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, если известно, что в неё можно вписать окружность, а средняя линия трапеции равна 4,6 см.
7. В треугольнике MNK угол M равен 76° , угол K равен 44° . Найдите длину стороны MK , если радиус описанной вокруг этого треугольника окружности равен $4\sqrt{3}$.
8. Из точки A , взятой вне круга, проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая ACD (C и D — точки пересечения с окружностью). Найдите длину AB , если $AC = 4$, $CD = 5$.
9. В трапеции $MPKE$ с основаниями KP и ME биссектрисы углов K и E пересекаются в точке A . Найдите длину отрезка AE , если $KE = 12,5$, $AK = 7,5$.

10. Три точки заданы своими координатами: $M(-1; 2)$, $K(0; 7)$, $P(6; 3)$.

Найдите длину MM_1 — медианы треугольника MKP .

ЧАСТЬ II

C1. В выпуклом четырёхугольнике диагонали равны между собой, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны 10 см и 24 см. Найдите площадь четырёхугольника.

C2. В четырёхугольнике $MNPQ$ длина стороны MN равна 5, $\sin NMP = 0,48$, $\sin NQM = 0,6$. Сумма углов NMQ и QPN равна 180° . Найдите длину стороны NP .

C3. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $C(-4; 6)$ и отсекающей от окружности $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ хорду длины 8.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 4

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 2,5$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника.
2. Найдите площадь треугольника MNK , в котором $MN = 6$, $MK = 10$, $\cos M = -0,8$.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол B равен 120° , $AB = 4$, $AD = 2\sqrt{3}$. На диагонали AC взяты точки M и N так, что $AM = MN = NC$. Найдите площадь треугольника BMN .
4. В трапеции $MEKP$ с основаниями EK и MP диагонали пересекаются в точке O , $EK = 3,5$ см, $MP = 7$ см. Во сколько раз площадь треугольника MOP больше площади треугольника KOE ?
5. Биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . $AD = 6$, $CK = 4$. Найдите периметр параллелограмма.
6. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Найдите длину её средней линии, если боковая сторона равна $2,4$ см.
7. В треугольнике ABC угол A равен 72° , угол C равен 78° . Найдите длину стороны AC , если диаметр описанной вокруг этого треугольника окружности равен $4,2$ см.
8. В окружности хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на отрезки 4 см и 9 см. Найдите длину хорды.
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O . Найдите длину стороны AB , если $OA = 6$, $OB = 8$.
10. Три точки заданы своими координатами: $A(3; 4)$, $B(2; -1)$, $C(9; 0)$. Найдите длину BB_1 — медианы треугольника ABC .

ЧАСТЬ II

- С1.** Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, если его диагонали равны между собой, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны 9 см и 12 см.
- С2.** В четырёхугольнике $МКРЕ$ длина стороны $МК$ равна 15, $\sin KMP = 0,36$, длина стороны KP равна 20. Сумма углов KME и KPE равна 180° . Найдите $\sin MEK$.
- С3.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $K(-1; -4)$ и отсекающей от окружности $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ хорду длины 6.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 5

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике MNK угол N прямой, $\sin K = 0,25$, радиус описанной окружности равен 12,6. Найдите длину MN .
2. Найдите площадь треугольника ABC , в котором $BA = 15$, $BC = 10$, $\cos B = \frac{24}{25}$.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол B равен 150° , $AB = 4,2$ см, $AD = 5$ см. На диагонали BD взяты точки M и N , которые делят BD на три равные части. Найдите площадь треугольника MNA .
4. В трапеции $MKPE$ основания KP и ME равны 8 см и 10 см соответственно, одна из диагоналей равна 27 см. Найдите длину меньшего из отрезков, на которые она делится другой диагональю.
5. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M , $BM = 4$, $MC = 6$. Найдите периметр параллелограмма.
6. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, если известно, что в эту трапецию вписана окружность, а средняя линия трапеции равна 3,8 см.
7. В треугольнике MNK угол N равен 77° , угол K равен 43° . Найдите длину стороны NK , если радиус описанной вокруг этого треугольника окружности равен $5\sqrt{3}$.
8. Из точки P , взятой вне круга, проведены касательная PA (A — точка касания) и секущая PBC (B и C — точки пересечения с окружностью). Найдите длину PA , если $PB = 9$, $BC = 7$.
9. Три точки заданы своими координатами: $A(2; 2)$, $B(3; 7)$, $C(9; 3)$. Найдите длину AA_1 — медианы треугольника ABC .
10. В трапеции $MKPE$ с основаниями KP и ME биссектрисы углов P и E пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка OP , если $OE = 4,5$, $PE = 7,5$.

ЧАСТЬ II

- С1.** Диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны, и отношение их длин равно $5 : 12$. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равен 26 см. Найдите площадь четырёхугольника.
- С2.** В четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна 12 , $\sin BAC = 0,32$, $\sin ADB = 0,48$. Сумма углов BAD и BCD равна 180° . Найдите длину стороны BC .
- С3.** Известно, что прямая проходит через центр окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ и точку пересечения этой окружности с осью абсцисс. Запишите уравнение этой прямой.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 6

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике ABC $AB = 25$, $BC = 24$, $AC = 7$. Найдите $\operatorname{tg} A$.
2. Найдите площадь треугольника MNK , в котором $MN = 5$, $NK = 10$,
 $\cos N = \frac{7}{25}$.
3. В параллелограмме $MKPE$ угол K равен 120° , $KM = 6\sqrt{3}$, $KP = 5$. На диагонали MP взяты точки A и B так, что $MA = AB = BP$. Найдите площадь треугольника MKA .
4. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O , $BC = 4,2$ см, $AD = 12,6$ см. Какую часть площади треугольника BOC составляет от площади треугольника AOD ?
5. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке K , $AD = 8$, $AK = 5$. Найдите периметр параллелограмма.
6. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Найдите длину её средней линии, если боковая сторона равна $5,6$ см.
7. В треугольнике ABC угол B равен 93° , угол C равен 57° . Найдите длину стороны BC , если радиус описанной вокруг этого треугольника окружности равен $2,6$ см.
8. В окружности хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на отрезки 9 см и 16 см. Найдите длину хорды.
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P . Найдите длину стороны AB , если $BP = 6$, $AP = 2,5$.
10. Три точки заданы своими координатами: $M(-1; -1)$, $P(0; 4)$, $K(6; 0)$. Найдите длину MM_1 — медианы треугольника MPK .

ЧАСТЬ II

- С1.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $MNPQ$ взаимно перпендикулярны, и отношение их длин равно $4 : 7,5$, A — середина MN , D — середина PQ , $AD = 17$. Найдите площадь четырёхугольника $MNPQ$.
- С2.** В четырёхугольнике $KLMN$ длина стороны KL равна 8, $\sin LKM = 0,8$, длина стороны LM равна 9,6. Сумма углов KLM и MNK равна 180° . Найдите $\sin LNK$.
- С3.** Известно, что прямая проходит через центр окружности $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$ и точку пересечения этой окружности с осью ординат. Запишите уравнение этой прямой.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 7

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике MNK угол M прямой, радиус описанной окружности равен 12,5 и $MK = 20$. Найдите длину $tg N$.
2. Найдите площадь треугольника ABC , в котором $AB = 4$, $AC = 5$, $\cos A = 0,6$.
3. В параллелограмме $MEKP$ угол E равен 135° , $KE = 4\sqrt{2}$, $KP = 3$. На диагонали PE взяты точки A и B , которые делят PE на три равные части. Найдите площадь треугольника MAB .
4. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 16 см и 20 см, одна из диагоналей равна 18 см. Найдите длину большего из отрезков, на которые она делится другой диагональю.
5. Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке M , $AM = 3$, $MD = 7$. Найдите периметр параллелограмма.
6. Найдите длину боковой стороны равнобедренной трапеции, если известно, что в неё можно вписать окружность, а средняя линия трапеции равна 4,6 см.
7. В треугольнике MNK угол M равен 76° , угол K равен 44° . Найдите длину стороны MK , если радиус описанной вокруг этого треугольника окружности равен $4\sqrt{3}$.
8. Из точки A , взятой вне круга, проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая ACD (C и D — точки пересечения с окружностью). Найдите длину AB , если $AC = 4$, $CD = 5$.
9. В трапеции $MPKE$ с основаниями KP и ME биссектрисы углов K и E пересекаются в точке A . Найдите длину отрезка AE , если $KE = 12,5$, $AK = 7,5$.

10. Три точки заданы своими координатами: $M(-1; 2)$, $K(0; 7)$, $P(6; 3)$.

Найдите длину MM_1 — медианы треугольника MKP .

ЧАСТЬ II

C1. Диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны, и отношение их длин равно $3 : 4$. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равен 25 см. Найдите площадь четырёхугольника.

C2. В четырёхугольнике $MNPQ$ длина стороны MN равна 5 , $\sin NMP = 0,48$, $\sin NQM = 0,6$. Сумма углов NMQ и QPN равна 180° . Найдите длину стороны NP .

C3. Известно, что прямая проходит через центр окружности $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ и точку пересечения этой окружности с осью абсцисс. Запишите уравнение этой прямой.

При решении задач части I достаточно записать только ответы.

При решении задач части II необходимо записать полное решение со всеми обоснованиями и ответ.

Вариант 8

ЧАСТЬ I

1. В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 2,5$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника.
2. Найдите площадь треугольника MNK , в котором $MN = 6$, $MK = 10$, $\cos M = -0,8$.
3. В параллелограмме $ABCD$ угол B равен 120° , $AB = 4$, $AD = 2\sqrt{3}$. На диагонали AC взяты точки M и N так, что $AM = MN = NC$. Найдите площадь треугольника BMN .
4. В трапеции $MEKP$ с основаниями EK и MP диагонали пересекаются в точке O , $EK = 3,5$ см, $MP = 7$ см. Во сколько раз площадь треугольника MOP больше площади треугольника KOE ?
5. Биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K , $AD = 6$, $CK = 4$. Найдите периметр параллелограмма.
6. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Найдите длину её средней линии, если боковая сторона равна $2,4$ см.
7. В треугольнике ABC угол A равен 72° , угол C равен 78° . Найдите длину стороны AC , если диаметр описанной вокруг этого треугольника окружности равен $4,2$ см.
8. В окружности хорда, перпендикулярная диаметру, делит его на отрезки 4 см и 9 см. Найдите длину хорды.
9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O . Найдите длину стороны AB , если $OA = 6$, $OB = 8$.
10. Три точки заданы своими координатами: $A(3; 4)$, $B(2; -1)$, $C(9; 0)$. Найдите длину BB_1 — медианы треугольника ABC .

ЧАСТЬ II

- С1.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, и отношение их длин равно $2,5 : 6$. M — середина AD , K — середина BC , $MK = 26$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
- С2.** В четырёхугольнике $MKPE$ длина стороны MK равна 15, $\sin KMP = 0,36$, длина стороны KP равна 20. Сумма углов KME и KPE равна 180° . Найдите $\sin MEK$.
- С3.** Известно, что прямая проходит через центр окружности $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$ и точку пересечения этой окружности с осью абсцисс. Запишите уравнение этой прямой.

**ОТВЕТЫ К ИТОГОВЫМ КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ
ПО ПЛАНИМЕТРИИ ДЛЯ 9 КЛАССОВ**

	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	6,3	$3\frac{3}{7}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{24}$
2	21	24	8	18
3	1,75	7,5	1	2
4	12	$\frac{1}{9}$	10	4
5	28	36	34	20
6	3,8	5,6	4,6	2,4
7	15	2,6	12	8,4
8	12	24	6	12
9	5	6,5	10	10
10	6	5	5	5
C1	192	120	240	108
C2	8	$\frac{2}{3}$	6,25	0,48
C3	$x = 5;$ $y = \frac{7}{24}x + 1\frac{13}{24}$	$x = -7;$ $y = \frac{7}{24}x + \frac{145}{24}$	$x = -4;$ $y = -\frac{7}{24}x + \frac{29}{5}$	$x = -3;$ $y = \frac{9}{20}x - \frac{71}{20}$

	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
1	6,3	$3\frac{3}{7}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{24}$
2	21	24	8	18
3	1,75	7,5	1	2
4	12	$\frac{1}{9}$	10	4
5	28	36	34	20
6	3,8	5,6	4,6	2,4
7	15	2,6	12	8,4
8	12	24	6	12
9	5	6,5	10	10
10	6	5	5	5
C1	480	240	600	480
C2	8	$\frac{2}{3}$	6,25	0,48
C3	$y = -\frac{\sqrt{6}}{12}x + \frac{\sqrt{6}-6}{6};$ $y = \frac{\sqrt{6}}{12}x - \frac{\sqrt{6}+6}{6}$	$y = \frac{4}{3}x + 5;$ $y = -\frac{4}{3}x - 3$	$y = \frac{2}{\sqrt{21}}x + 2 + \frac{2}{\sqrt{21}};$ $y = -\frac{2}{\sqrt{21}}x + 2 - \frac{2}{\sqrt{21}}$	$y = \frac{\sqrt{6}}{12}x - \frac{\sqrt{6}}{4} - 1;$ $y = -\frac{\sqrt{6}}{12}x + \frac{\sqrt{6}}{4} - 1$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЧАСТИ II ИТОГОВЫХ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ПЛАНИМЕТРИИ ДЛЯ 9 КЛАССОВ (ВАРИАНТЫ 1—4)

С1. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, если его диагонали равны между собой, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны 12 см и 16 см.

Решение:

Соединим середины сторон четырёхугольника $ABCD$ (рис. 109). Получившийся четырёхугольник $FGHE$ будет являться параллелограммом, а в силу того, что $BD = AC$, ещё и ромбом. Отрезки GE и FH — диагонали ромба, следовательно,

$$S_{FGHE} = \frac{GE \cdot FH}{2} = 96 \text{ кв. ед.}$$

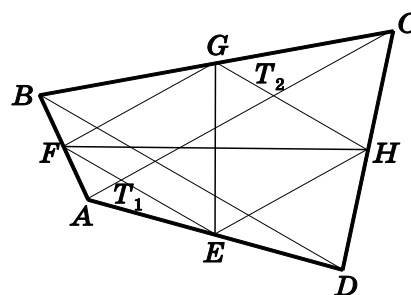


Рис. 109

Выясним, какую часть составляет площадь внутреннего параллелограмма от площади исходного четырёхугольника. Пусть отрезок AC разбивает этот параллелограмм на два, площади которых S_1 и S_2 . Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 110), в котором проведена средняя линия FG . Площадь любого параллелограмма T_1FGT_2 равна площади параллелограмма $MFGC$, где FM — средняя линия треугольника ABC . А площадь $MFGC$ составляет половину площади треугольника ABC , так как площадь каждого из треугольников FBG и AFM составляет четверть площади ABC .

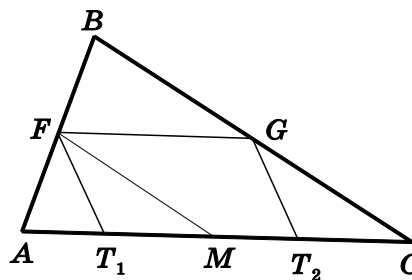


Рис. 110

Таким образом, возвращаясь к начальной задаче, S_1 составляет половину площади ABC , а S_2 — половину площади ADC . Следовательно, их сумма составляет половину площади $ABCD$.

Ответ: площадь $ABCD$ равна 192 кв. ед.

С2. В четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна 12, $\sin BAC = 0,32$, $\sin ADB = 0,48$. Сумма углов BAD и BCD равна 180° . Найдите длину стороны BC .

Решение:

В четырёхугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов составляет развёрнутый угол, значит, вокруг $ABCD$ можно описать окружность (рис. 111). При этом углы ADB и ACB опираются на одну дугу AB , следовательно, они равны.

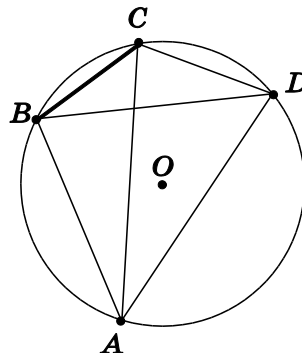


Рис. 111

Рассмотрим треугольник ABC . Согласно теореме синусов $\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin BAC}$. Подставим известные

величины: $\frac{12}{0,48} = \frac{BC}{0,32}$. Отсюда $BC = 8$.

Ответ: 8.

С3. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 3)$ и отсекающей от окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ хорду длины 8.

Решение:

Способ 1

Заметим, что точка A лежит на указанной окружности (рис. 112). Хорд длиной 8 из этой точки исходит две: AC и AD . Вписанный угол ACB опирается на диаметр, значит, он прямой. При этом диаметр равен 10, а точка, диаметрально противоположная точке A , — это точка $B(-1; -5)$.

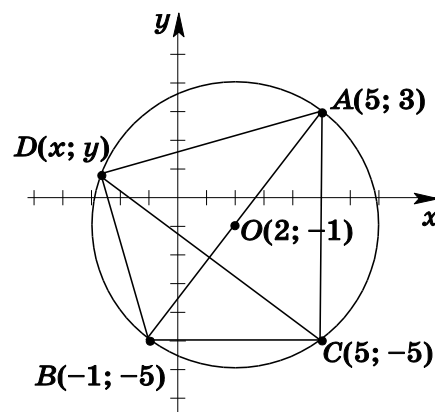


Рис. 112

$AC = 8$, следовательно, по теореме Пифагора, $BC = 6$. Нетрудно догадаться, что в качестве координат точки C подходит пара $(5; -5)$. Это означает, что сторона BC параллельна оси абсцисс, сторона AC параллельна оси ординат. Тогда,

уравнение одной из прямых AC : $x=5$. Треугольник ACB симметричен треугольнику ADB относительно прямой AB , значит, сторона CD перпендикулярна стороне AB , $A(5;3)$, $B(-1;-5)$, следовательно, уравнение прямой AB будет иметь вид $4x - 3y - 11 = 0$.

Иначе, AB : $y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$. Тогда, CD : $y = -\frac{3}{4}x + b$, при этом $C(5;-5) \in CD$, следовательно, CD : $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, или CD : $3x + 4y + 5 = 0$. Найдём координаты точки пересечения окружности и прямой CD .

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25. \end{cases}$$

Подставив первое уравнение во второе, получим после преобразований: $25x^2 - 58x - 335 = 0$. Уравнение было бы малоприятным, но мы знаем, что одним из его корней является число 5, поскольку точка C — тоже точка пересечения прямой и окружности. Значит, по теореме Виета: $5x = \frac{-335}{25}$, следовательно, $x = -2,68$, $y = 0,76$. Мы получили координаты точки D . Зная координаты точек A и D , найдём уравнение AD : $y = \frac{7}{24}x + 1\frac{13}{24}$.

Способ 2

Рассуждения, приводящие к тому, что уравнение AC : $x=5$, аналогичны первому способу. Найдём уравнение прямой AD , исходя из того факта, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс: $\operatorname{tg} ABC = \frac{4}{3}$, значит, $\operatorname{tg} BAC = \frac{3}{4}$, $\angle DAC = 2 \cdot \angle BAC$. Используя формулу $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, получим $\operatorname{tg} DAC = \frac{24}{7}$,

следовательно, $\operatorname{tg}(AD \wedge Ox) = \frac{7}{24}$. То есть уравнение прямой AD : $y = \frac{7}{24}x + b_1$.

Зная, что точка $A(5; 3) \in AD$, находим уравнение AD : $y = \frac{7}{24}x + 1\frac{13}{24}$.

Способ 3

Рассуждения, приводящие к тому, что уравнение AC : $x = 5$, аналогичны первому способу. Заметим, что сторона CD перпендикулярна стороне AB , а значит, треугольник ABC разбит на два подобных себе. Это означает, что точка пересечения диагоналей делит отрезок AB в отношении 16:9 (это нетрудно рассчитать самостоятельно), а для отрезка CD является серединой. Отсюда координаты точки пересечения диагоналей $\left(5 - \frac{16}{25} \cdot 6; 3 - \frac{16}{25} \cdot 8\right)$, то есть $(1,16; -2,12)$. Итак, мы получили координаты середины отрезка CD : $1,16 = \frac{x+5}{2}$; $-2,12 = \frac{y-5}{2}$. Отсюда $x = -2,68$; $y = 0,76$. Найдены координаты точки D , далее как в первом способе.

Несомненно, существуют и другие способы решения данной задачи.

Ответ: AC : $x = 5$; AD : $y = \frac{7}{24}x + 1\frac{13}{24}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЧАСТИ II ИТоговых контрольных работ ПО ПЛаниметрии для 9 классов (Варианты 5—8)

С1. Диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны, и отношение их длин равно 5 : 12. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равен 26 см. Найдите площадь четырёхугольника.

Решение:

Соединим середины сторон
четырёхугольника $ABCD$ (рис. 113).

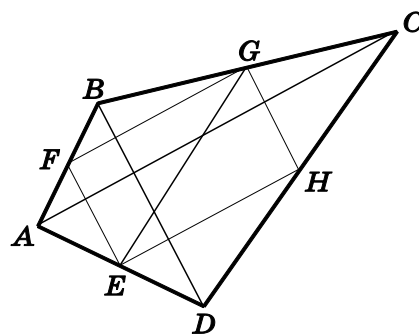


Рис. 113

Получившийся четырёхугольник $FGHE$ будет являться параллелограммом, а в силу того, что сторона BD перпендикулярна стороне AC , ещё и прямоугольником. Отрезки GE и FH — диагонали прямоугольника, следовательно, они равны между собой. Длина стороны FE составляет половину длины стороны BD , а длина стороны EH — половину длины стороны AC , значит, их отношение тоже равно $5 : 12$. По теореме Пифагора: $EH = 24$, $FE = 10$. Следовательно, $AC = 48$, $BD = 20$. Поскольку они взаимно перпендикулярны, то $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 480$ кв. ед.

Ответ: площадь $ABCD$ равна 480 кв. ед.

С2. В четырёхугольнике $ABCD$ длина стороны $AB = 12$, $\sin BAC = 0,32$, $\sin ADB = 0,48$. Сумма углов BAD и BCD равна 180° . Найдите длину стороны BC .

Решение:

В четырёхугольнике $ABCD$ сумма противоположных углов составляет развёрнутый угол, значит, вокруг $ABCD$ можно описать окружность (рис. 114). При этом углы ADB и ACB опираются на одну дугу AB , следовательно, они равны.

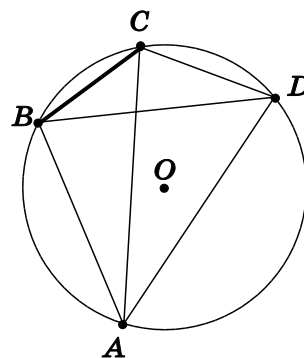


Рис. 114

Рассмотрим треугольник ABC . Согласно теореме

синусов $\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin BAC}$. Подставим известные

величины: $\frac{12}{0,48} = \frac{BC}{0,32}$. Отсюда $BC = 8$.

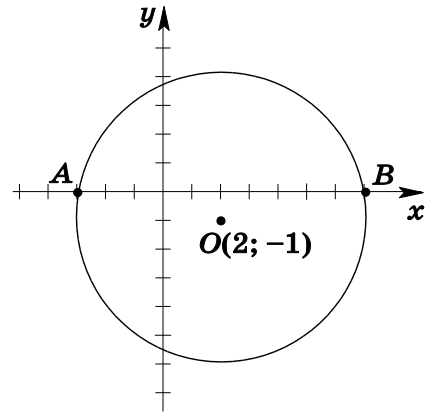
Ответ: 8.

С3. Известно, что прямая проходит через центр окружности $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ и точку пересечения этой окружности с осью абсцисс. Запишите уравнение этой прямой.

Решение:

Заметим, что таких прямых две, поскольку окружность пересекает ось абсцисс в двух точках — A и B (рис. 115). Найдём их координаты. Ординаты этих точек равны нулю. Следовательно, абсциссы являются корнями уравнения $(x - 2)^2 = 24$. То есть

$$\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{6}, \\ x = 2 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

**Рис. 115**

Прямая AO : $\frac{x - (2 - 2\sqrt{6})}{2 - (2 - 2\sqrt{6})} = \frac{y - 0}{-1 - 0}$, то есть $y = -\frac{\sqrt{6}}{12}x + \frac{\sqrt{6} - 6}{6}$.

Прямая BO : $\frac{x - (2 + 2\sqrt{6})}{2 - (2 + 2\sqrt{6})} = \frac{y - 0}{-1 - 0}$, то есть $y = \frac{\sqrt{6}}{12}x - \frac{\sqrt{6} + 6}{6}$.

У ч е б н о е и з д а н и е

Евстафьева Лариса Петровна
Евстафьев Валентин Андреевич

ГЕОМЕТРИЯ
Дидактические материалы
9 класс

Пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *И. В. Рекман*
Младший редактор *Е. В. Трошко*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губина, С. А. Крутиков*
Корректор *О. Н. Леонова*

A

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

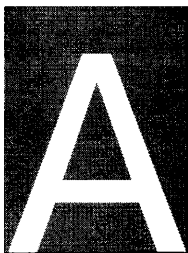
Л. П. Евстафьева

Дидактические материалы

Геометрия

10
11


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО



Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Л. П. Евстафьева

Геометрия

Дидактические
материалы

10-11 классы

Пособие
для общеобразовательных
организаций

2-е издание,
с дополнениями

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1
ББК 22.151.72
Е26

12+

Серия «Академический школьный учебник» основана в 2005 году.

Проект «Российская академия наук, Российская академия образования, издательство «Просвещение» — российской школе».

Руководители проекта: вице-президент РАН акад. **В. В. Козлов**, президент РАО акад. **Н. Д. Никандров**, д-р пед. наук, чл.-корр. РАО **А. М. Кондаков**.

Научные редакторы серии: акад. РАО, д-р пед. наук **А. А. Кузнецов**, акад. РАО, д-р пед. наук **М. В. Рыжаков**, д-р экон. наук **С. В. Сидоренко**.

Автор выражает благодарность **В. А. Евстафьеву** за оказание технической помощи при написании книги.

Евстафьева Л. П.

Е26 Геометрия. Дидактические материалы. 10—11 классы: пособие для общеобразоват. организаций / Л. П. Евстафьева; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение». — 2-е изд., с доп. — М.: Просвещение, 2014. — 94 с.: ил. — (Академический школьный учебник). — ISBN 978-5-09-028101-0.

Данное пособие содержит самостоятельные работы и тесты по геометрии. Они предназначены для работы с учебником «Геометрия, 10—11» авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика.

УДК 373.167.1
ББК 22.151.72

ISBN 978-5-09-028101-0

- © Издательство «Просвещение», 2004
 - © Издательство «Просвещение» с дополнениями, 2014
 - © Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2008
- Все права защищены

Предисловие

Дидактические материалы к учебнику содержат самостоятельные работы в двух вариантах и тесты.

Самостоятельные работы написаны к каждому параграфу, а зачастую и к каждому пункту параграфа, но это не означает, что учитель обязан проводить каждую самостоятельную работу, мало того, он может использовать их для опроса отдельных учащихся, а не всего класса. Это особенно удобно, если дидактические материалы есть в кабинете математики на каждого ученика.

Сложных задач в работах практически нет, так как короткие самостоятельные работы направлены на отработку понятий данного пункта или параграфа. Они помогают учителю следить за усвоением конкретного материала.

Самостоятельные работы представлены в двух вариантах одного уровня сложности и рассчитаны в основном на 10—15 минут. Самостоятельные работы для 10 класса содержат большое количество рисунков, которые подскажут ученику, как правильно изобразить те или иные объекты стереометрии, чтобы в дальнейшем он мог делать это самостоятельно. На наш взгляд, удобно работать с дидактическими материалами на уроке, если они есть у каждого ученика.

Тестов на повторение планиметрии в десятом классе два, причем тест № 1 посвящен треугольникам, а тест № 2 — другим фигурам плоскости. Предусматривается, конечно, что предварительно учитель повторяет с учащимися основные теоретические вопросы курса планиметрии, может быть составлен список необходимых формул.

Так как в программу 10—11 классов включены вопросы планиметрии, то им посвящается несколько самостоятельных работ и тесты. Заметим, что первый тест по теме «Треугольники» может быть дан в начале 10 класса для определения уровня знаний учащихся за 7—9 классы.

Остальные тесты написаны к главам учебника. Предусматривается, что они могут быть выполнены как в классе, так и дома для подведения итогов каждой главы. Например, учащиеся могут дома работать с тестами, а на следующем уроке каждый учащийся получает лишь часть теста в качестве контрольной работы.

В конце книги есть еще два теста (№ 4 и № 5), которые можно использовать при повторении всего курса геометрии за 10—11 классы.

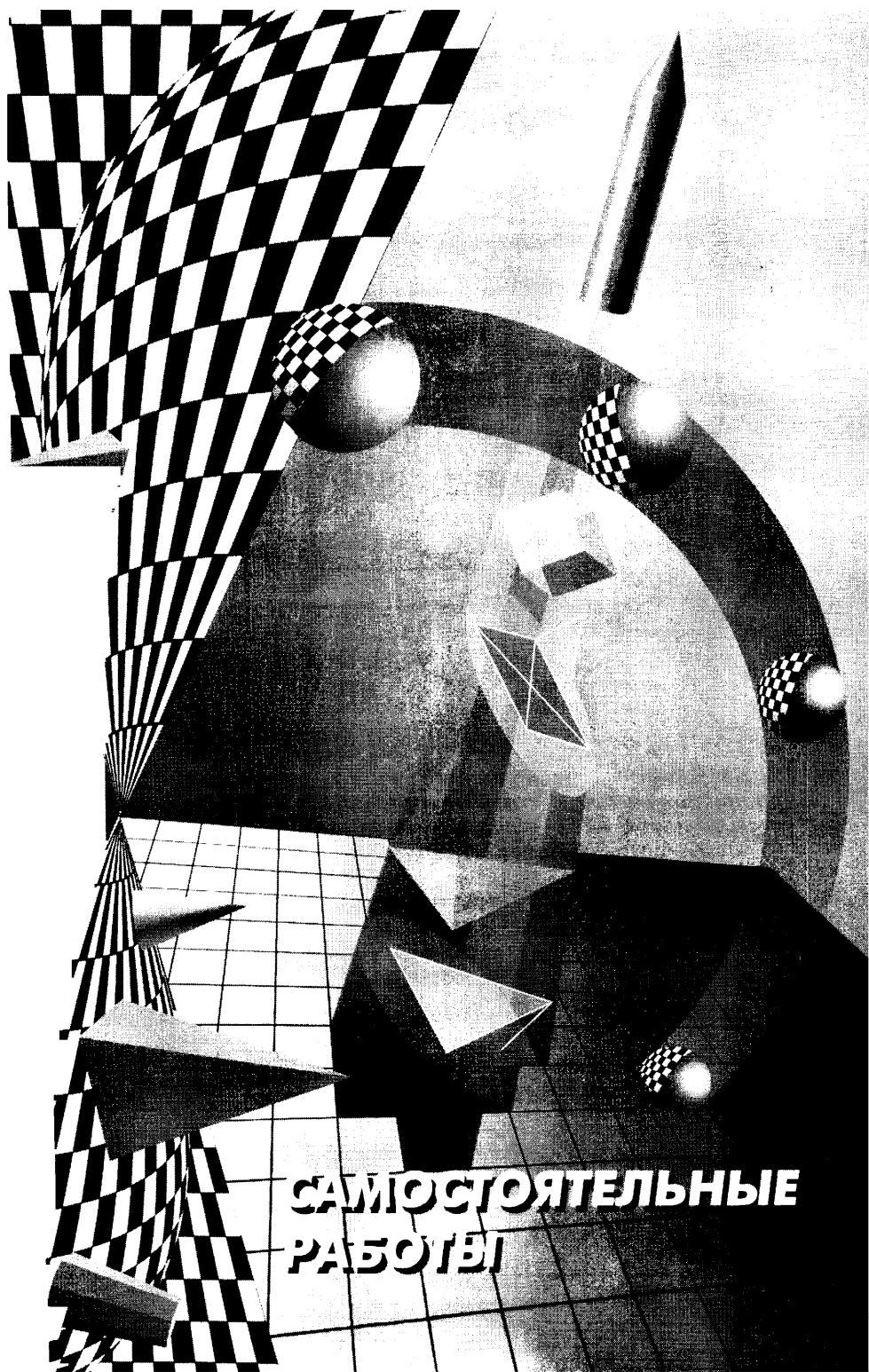
Проверка знаний с помощью тестов является достаточно новым в нашей стране видом контроля обучения. Тесты чаще используются учителем для проверки знаний учени-

ков и, к сожалению, реже используются учениками для самоконтроля. Думается, что тесты можно успешно использовать и с той и с другой целью.

При работе с тестами каждому ученику предлагается персональный листок с заданиями. В данной системе тестов к каждому тесту дается 4 варианта ответов, из которых ровно один правильный, его и должен назвать ученик. Если тестирование происходит в классе, то целесообразно выдать каждому ученику табличку для ответов типа:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

в пустые клеточки которой ученик и вписывает верный, по его мнению, ответ, указывая любую букву: А, Б, Если же ученик имеет возможность отмечать прямо в книге, то нужный ответ он обводит, подчеркивает, выделяет как-то иначе по договоренности с учителем.



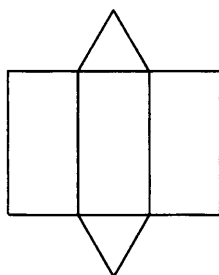
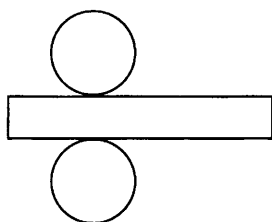
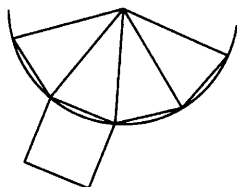
**САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ
РАБОТЫ**

С-1

К введению

Вариант 1

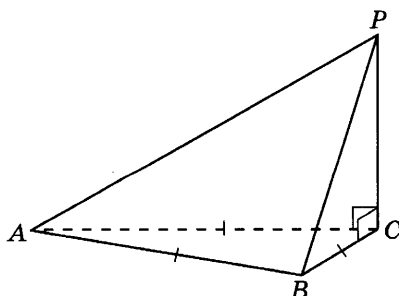
1. Развертки каких геометрических фигур изображены? Нарисуйте эти геометрические фигуры.



2. а) Какое из утверждений верно: *треугольник APB — разносторонний; треугольник APB — равнобедренный; треугольник APB — равносторонний?*

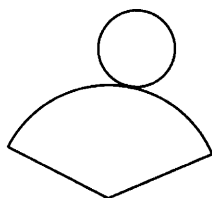
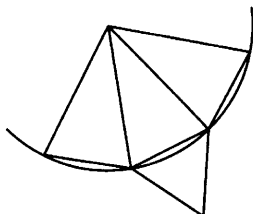
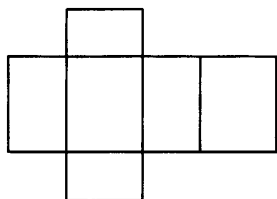
б) Изобразите среднюю линию треугольника APB , параллельную AB .

в) Изобразите высоту треугольника ABC , проведенную из вершины C .



Вариант 2

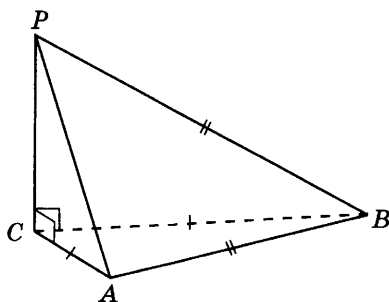
1. Развертки каких геометрических фигур изображены? Нарисуйте эти геометрические фигуры.



2. а) Какое из утверждений верно: *треугольник APB — разносторонний*; *треугольник APB — равнобедренный*; *треугольник APB — равносторонний*?

б) Изобразите среднюю линию треугольника APB , параллельную AB .

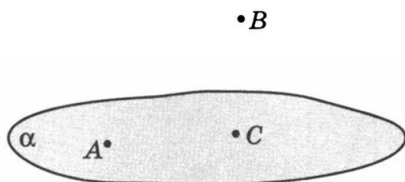
в) Изобразите высоту треугольника ABC , проведенную из вершины C .



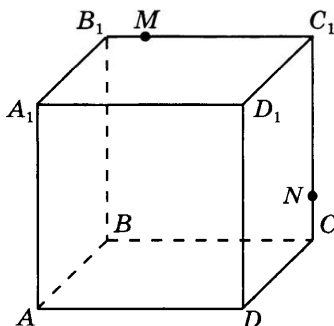
С-2
К пп. 1.1—1.3
Вариант 1

1. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β . Изобразите точки A и D , общие для плоскостей α и β ; точку B , принадлежащую α , но не принадлежащую β ; точку C , принадлежащую β , но не принадлежащую α . Назовите прямую: а) лежащую и в плоскости α , и в плоскости β ; б) лежащую в плоскости α , но не лежащую в плоскости β ; в) не лежащую ни в одной из плоскостей.

2. Точки A и C расположены на плоскости α , а точка B — вне плоскости α . Как расположены по отношению к плоскости α середины отрезков AB и AC ? Пусть точка C — середина отрезка AD . Изобразите точку D . Лежит ли она в плоскости α ?



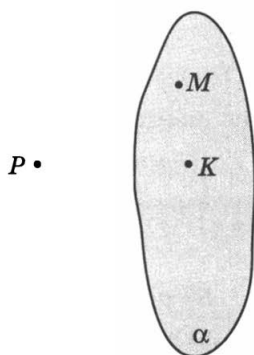
3. В плоскости какой грани куба лежит прямая MN ? Изобразите точку пересечения прямой MN с плоскостью (ABD) .



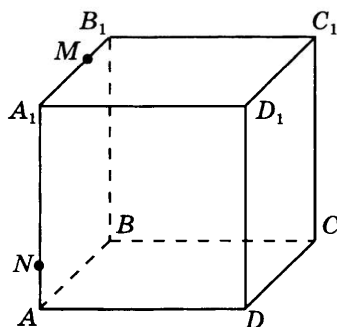
Вариант 2

1. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β . Изобразите точки M и A , общие для плоскостей α и β ; точку K , принадлежащую α , но не принадлежащую β ; точку P , принадлежащую β , но не принадлежащую α . Назовите прямую: а) лежащую и в плоскости α , и в плоскости β ; б) лежащую в плоскости α , но не лежащую в плоскости β ; в) не лежащую ни в одной из плоскостей.

2. Точки M и K расположены на плоскости α , а точка P — вне плоскости α . Как расположены по отношению к плоскости α середины отрезков MK и PK ? Пусть точка K — середина отрезка MA . Изобразите точку A . Лежит ли она в плоскости α ?

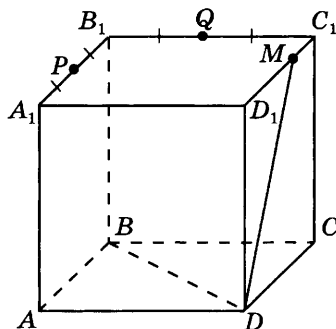


3. В плоскости какой грани куба лежит прямая MN ? Изобразите точку пересечения прямой MN с плоскостью (ABD) .



Вариант 1

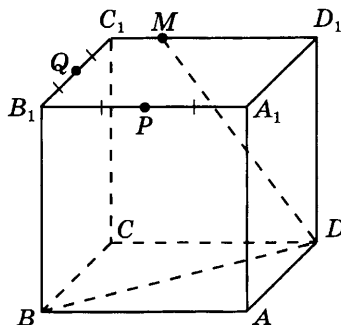
Ребро куба равно 6. Точки P и Q — середины A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, а точка M делит отрезок C_1D_1 в отношении $2 : 1$.



1. Найдите расстояние между точками: а) B и D ; б) M и D ; в) P и Q ; г) P и B .
2. Назовите вершины куба, принадлежащие: а) одному полупространству с границей (BMD) ; б) разным полупространствам с границей (BMD) .

Вариант 2

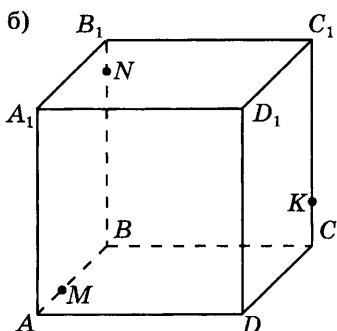
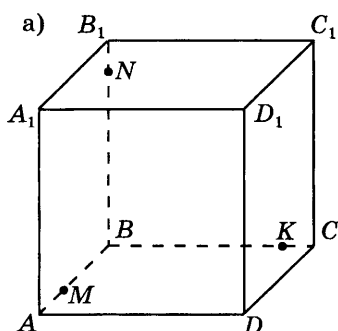
Ребро куба равно 6. Точки P и Q — середины A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, а точка M делит отрезок C_1D_1 в отношении $2 : 1$.



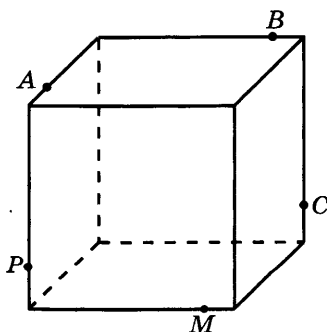
1. Найдите расстояние между точками: а) B и D ; б) M и D ; в) P и Q ; г) P и B .
2. Назовите вершины куба, принадлежащие: а) одному полупространству с границей (BMD) ; б) разным полупространствам с границей (BMD) .

Вариант 1

1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости MNK с гранями куба. Закрасьте получившуюся фигуру.



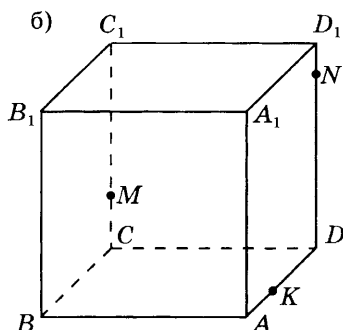
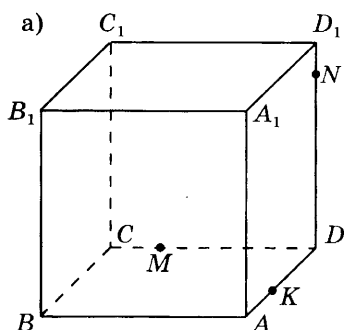
2. а) Имеется пять точек пространства, таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проводится прямая. Сколько различных прямых можно провести?



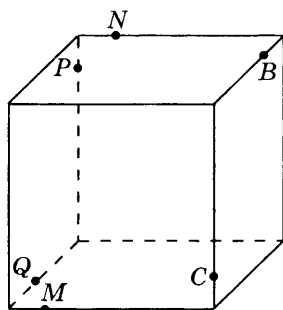
б) Какая из прямых, определяемых парой указанных точек, лежит в плоскости верхней грани куба, а какая не лежит ни в одной из плоскостей граней куба?

Вариант 2

1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости MNK с гранями куба. Закрасьте получившуюся фигуру.



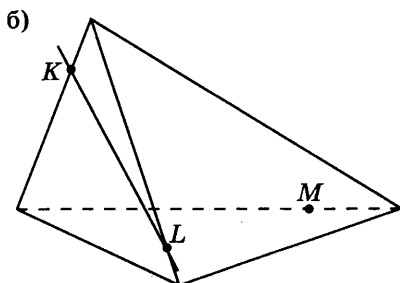
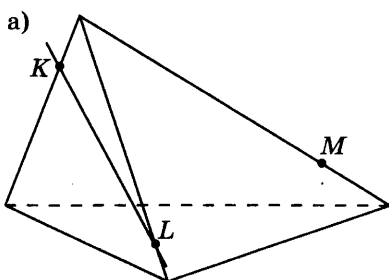
2. а) Имеется шесть точек пространства, таких, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проводится прямая. Сколько различных прямых можно провести?



б) Какая из прямых, определяемых парой указанных точек, лежит в плоскости верхней грани куба, а какая не лежит ни в одной из плоскостей граней куба?

Вариант 1

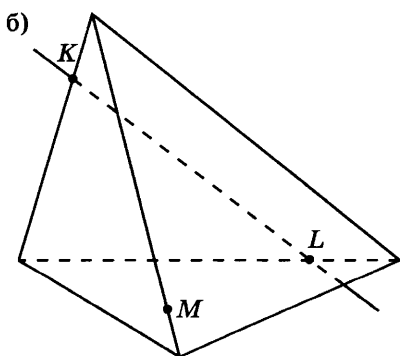
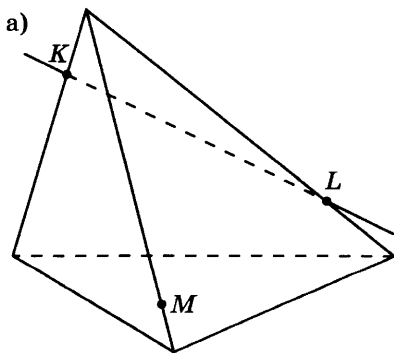
1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости, определенной прямой KL и точкой M , с гранями тетраэдра. Закрасьте эту фигуру.



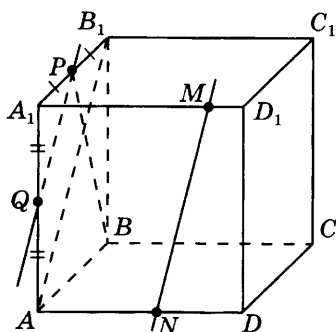
2. Прямые a и b пересекаются в точке O , прямые a и c пересекаются в точке M . Изобразите прямые a , b и c , если прямая c : а) пересекает плоскость, в которой лежат a и b ; б) лежит в плоскости, в которой лежат a и b .

Вариант 2

1. Изобразите фигуру, образованную линиями пересечения плоскости, определенной прямой KL и точкой M , с гранями тетраэдра. Закрасьте эту фигуру.



2. Прямые b и c пересекаются в точке P , прямые a и b пересекаются в точке Q . Изобразите прямые a , b и c , если прямая a : а) лежит в плоскости, в которой лежат c и b ; б) пересекает плоскость, в которой лежат c и b .

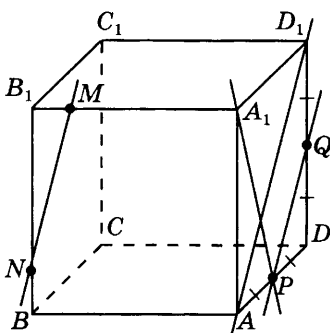
Вариант 1

Дано изображение куба.

Каково взаимное расположение (на модели куба) следующих пар прямых:

- 1) QP и AB_1 , если Q и P — середины AA_1 и A_1B_1 ;
- 2) AB_1 и BP ;
- 3) MN и AB_1 ;
- 4) MN и BC ;
- 5) MN и DD_1 ?

Для пересекающихся прямых укажите точку пересечения, для скрещивающихся и параллельных прямых укажите признак, на который опираетесь.

Вариант 2

Дано изображение куба.

Каково взаимное расположение (на модели куба) следующих пар прямых:

- 1) QP и AD_1 , если Q и P — середины DD_1 и AD ;
- 2) AD_1 и A_1P ;
- 3) MN и AD_1 ;
- 4) CD и A_1P ;
- 5) MN и AB ?

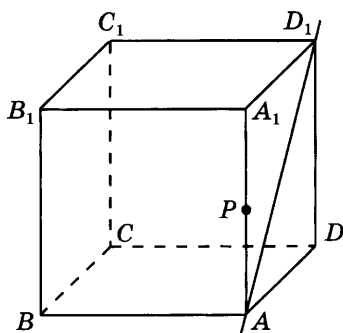
Для пересекающихся прямых укажите точку пересечения, для скрещивающихся и параллельных прямых укажите признак, на который опираетесь.

Вариант 1

1. Через точку P — середину A_1A проведите прямую:
 а) $PQ \parallel AD_1$; б) $PL \times AD_1$;
 $PR \cdot AD_1$, где знак $\times$ означает
 пересекающиеся прямые, а знак
 $\cdot$ — скрещивающиеся прямые.

2. Изобразите плоскость и в ней
 пересекающиеся прямые a и b .
 Изобразите прямые c , d и m , та-
 кие, что: а) $c \parallel a$ и $c \times b$; б) $d \cdot a$
 и $d \times b$; в) $m \cdot a$ и $m \cdot b$.

3. Изобразите две пересекаю-
 щиеся по прямой a плоскости α
 и β . Верно ли утверждение, что
 если M — точка плоскости α , а
 K — точка плоскости β , то пря-
 мые MK и a скрещиваются? От-
 вет обоснуйте.

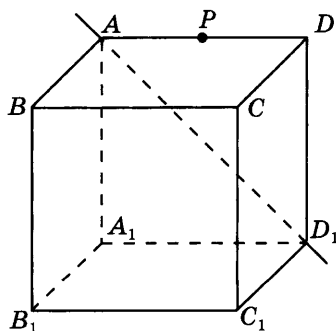


Вариант 2

1. Через точку P — середину AD
 проведите прямую: а) $PQ \parallel AD_1$;
 б) $PL \times AD_1$; $PR \cdot AD_1$, где знак
 $\times$ означает пересекающиеся пря-
 мые, а знак $\cdot$ — скрещиваю-
 щиеся прямые.

2. Изобразите плоскость и в ней
 параллельные прямые a и b .
 Изобразите прямые c , d и m , та-
 кие, что: а) $c \cdot a$ и $c \times b$; б) $d \cdot a$
 и $d \cdot b$; в) $m \times a$ и $m \times b$.

3. Изобразите две пересекаю-
 щиеся по прямой m плоскости α
 и β . Верно ли утверждение, что
 если A — точка плоскости β , а
 B и C — точки плоскости α ,
 причем $BC \parallel m$, то прямые AB и
 m скрещиваются? Ответ обос-
 нуйте.



Вариант 1

1. Изобразите плоскость α и точки M и K на ней, а точку C вне плоскости α . Пусть $CM = CK = 13$, а $MK = 10$.

а) Изобразите прямую, проходящую через точку C , перпендикулярную прямой MK .

б) Вычислите расстояние от точки C до прямой MK .

в) Вычислите площадь треугольника MKC .

2. Изобразите пирамиду, в основании которой параллелограмм $ABCD$, а вершина — точка P . Выделите другим цветом пирамиду $PMKC$, где точка M — середина AB , а точка K — точка отрезка AD , причем $AK : KD = 2 : 1$.

Вариант 2

1. Изобразите плоскость β и точки A и B на ней, а точку P вне плоскости β . Пусть $PA = PB = 17$, а $AB = 30$.

а) Изобразите прямую, проходящую через точку P , перпендикулярную прямой AB .

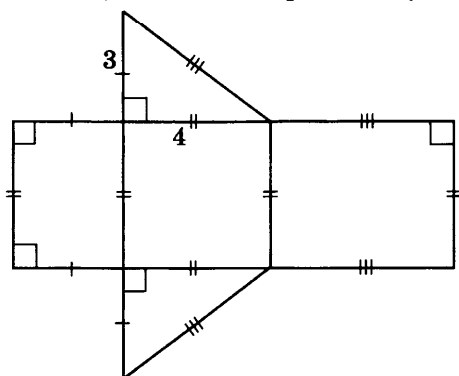
б) Вычислите расстояние от точки P до прямой AB .

в) Вычислите площадь треугольника APB .

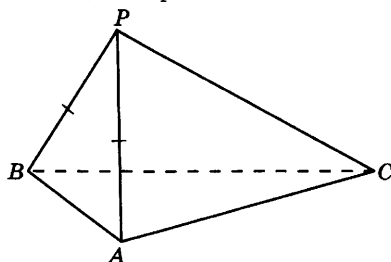
2. Изобразите пирамиду, в основании которой трапеция $ABCD$, а вершина которой — точка P . Выделите другим цветом пирамиду $PMKC$, где точка M — середина AB , а точка K — точка отрезка AD , причем $AK : KD = 3 : 1$.

Вариант 1

1. Изобразите ту геометрическую фигуру, развертка которой изображена. Опишите эту фигуру. По данным на развертке найдите площадь каждой грани полученной фигуры.

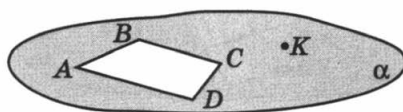


2. Пусть $PABC$ — изображение тетраэдра. Изобразите, учитывая данные на рисунке: а) в треугольнике APB высоту PP_1 ; б) в треугольнике PBC медиану PP_2 ; в*) в треугольнике ABC биссектрису AA_1 , считая, что $AC : AB = 3 : 1$.



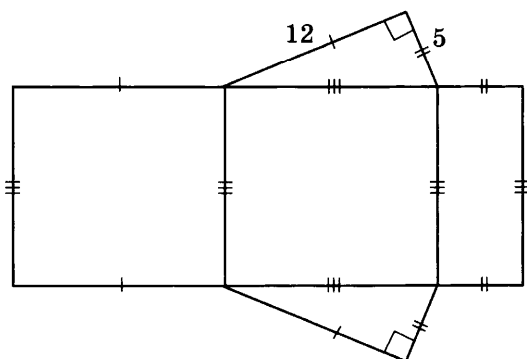
3. $ABCD$ — трапеция. Точка K на плоскости ABC , а M вне ее. Изобразите прямые MP и KE , пересекающие прямую BC . Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к прямой AD ; б) к плоскости α ?

M

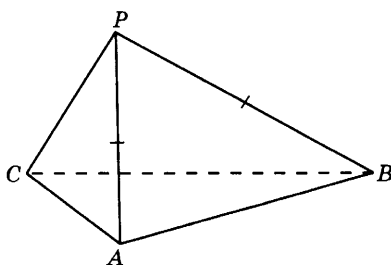


Вариант 2

1. Изобразите ту геометрическую фигуру, развертка которой изображена. Опишите эту фигуру. По данным на развертке найдите площадь каждой грани полученной фигуры.

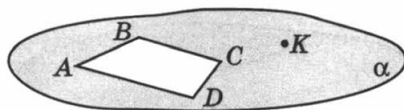


2. Пусть $PABC$ — изображение тетраэдра. Изобразите, учитывая данные на рисунке: а) в треугольнике APB высоту PP_1 , б) в треугольнике PBC медиану PP_2 ; в*) в треугольнике ABC биссектрису CC_1 , считая, что $BC : AC = 3 : 1$.



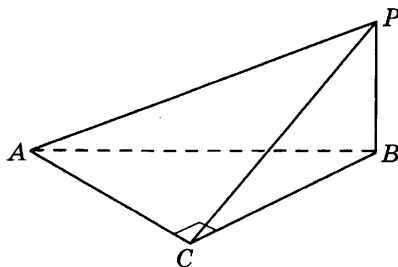
3. $ABCD$ — трапеция. Точка K на плоскости ABC , а M вне ее. Изобразите прямые MP и KE , пересекающие прямую AD . Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к прямой BC ; б) к плоскости α ?

M

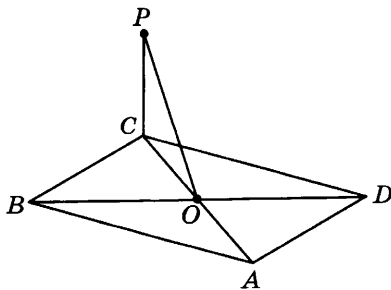


С-10
К пп. 6.1–6.3
Вариант 1

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, а $BP \perp (ABC)$. Какие из утверждений верны: а) $PA > PB$; б) $PC < PB$; в) $AP = PC$; г) $AP > PC$?

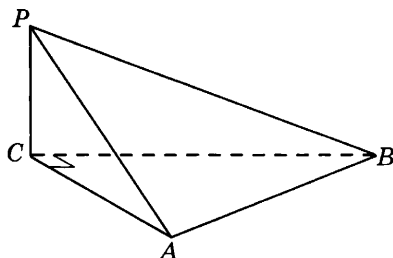


2. $ABCD$ — ромб. $S_{ABCD} = 24$; $BD = 6$; $CP \perp (ABC)$; $CP = 3$. Найдите длину отрезка OP .

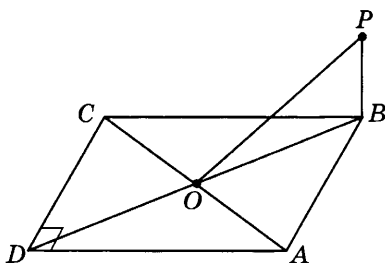


Вариант 2

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 38^\circ$, а $PC \perp (ABC)$. Какие из утверждений верны: а) $PC > PB$; б) $PA > PC$; в) $PB = PA$; г) $PB > PA$?



2. $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. $PB \perp (ABCD)$; $PB = 12$ см. Найдите длину отрезка PO .



С-11

К п. 7.1

Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть ребро куба равно a см. а) Докажите, что $A_1 B_1 \perp (AA_1 D_1 D)$. б) Докажите, что треугольник $A_1 B_1 D$ прямоугольный. в) Найдите длины отрезков $A_1 D$ и $B_1 D$. г) Найдите тангенс угла $B_1 D A_1$.
2. К плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр OP через точку O пересечения диагоналей. Сделайте рисунок. Докажите, что $BD \perp (OPC)$.
-

Вариант 2

1. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть ребро куба равно b см. а) Докажите, что $B_1 C_1 \perp (CC_1 D_1 D)$. б) Докажите, что треугольник $C_1 B_1 D$ прямоугольный. в) Найдите длины отрезков $C_1 D$ и $B_1 D$. г) Найдите тангенс угла $DB_1 C_1$.

2. К плоскости ромба $ABCD$ проведен перпендикуляр OP через точку O пересечения диагоналей. Сделайте рисунок. Докажите, что $AC \perp (OPD)$.

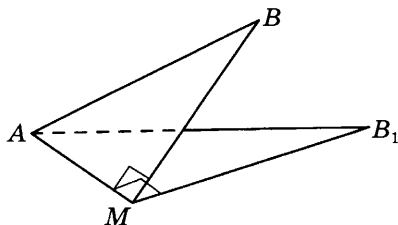
С-12

К п. 7.1

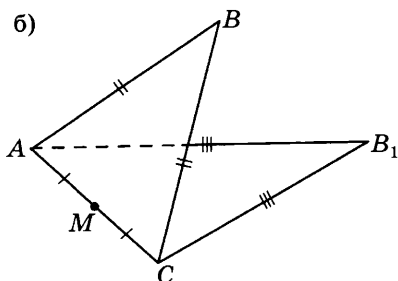
Вариант 1

Соедините точки B и B_1 на каждом из рисунков. На отрезке BB_1 отметьте произвольную точку P . Докажите, что $\angle AMP = 90^\circ$.

а)



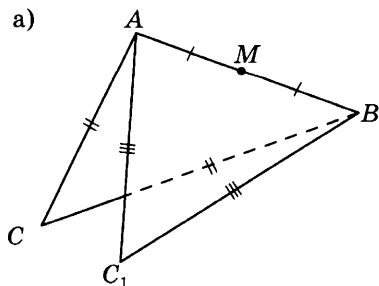
б)



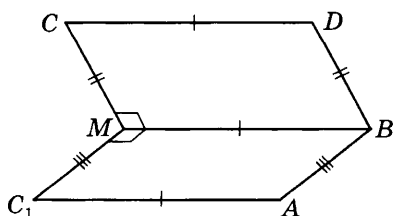
Вариант 2

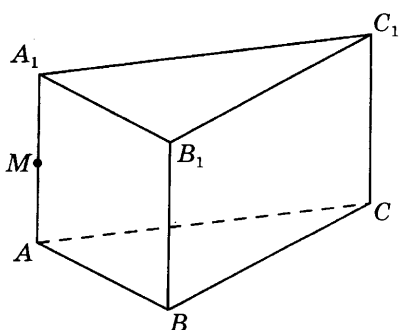
Соедините точки C и C_1 на каждом из рисунков. На отрезке CC_1 отметьте произвольную точку P . Докажите, что $\angle BMP = 90^\circ$.

а)



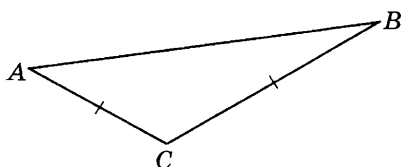
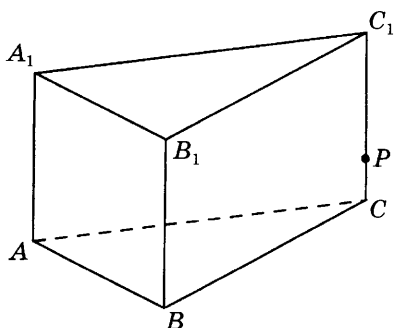
б)



Вариант 1

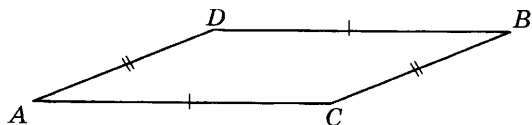
1. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Изобразите сечение призмы той плоскостью, в которой лежат все перпендикуляры к ребру AA_1 , проходящие через точку M .

2. Определите углы треугольника ABC , если плоскость, перпендикулярная BC , содержит прямую AC .

**Вариант 2**

1. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма. Изобразите сечение призмы той плоскостью, в которой лежат все перпендикуляры к ребру CC_1 , проходящие через точку P .

2. Определите углы параллелограмма $ACBD$, если плоскость, перпендикулярная BC , содержит прямую AC .



Вариант 1

1. Прямая m перпендикулярна плоскости α . Изобразите в плоскости α треугольник ABC , такой, что прямые AB и AC скрещиваются с прямой m , а прямая BC пересекается с прямой m .

2. К плоскости равнобедренного треугольника ABC , где $AB = BC$, $\angle B = 30^\circ$ и $AC = 4$, проведен перпендикуляр через центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, — точку O . На нем отложен отрезок $OP = 3$. Найдите расстояние от точки P до вершин треугольника ABC .

Вариант 2

1. Прямая m перпендикулярна плоскости α . Изобразите в плоскости α треугольник ABC , такой, что прямые AB и AC пересекаются с прямой m , а прямая BC скрещивается с прямой m .

2. К плоскости равнобедренного треугольника ABC , где $AB = BC$, $\angle B = 45^\circ$ и $AC = 4$, проведен перпендикуляр через центр окружности, описанной вокруг этого треугольника, — точку O . На нем отложен отрезок $OP = 2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки P до вершин треугольника ABC .

Вариант 1

1. а) Изобразите трапецию $ABCD$, ее среднюю линию MN и точку K вне плоскости трапеции. Изобразите прямую, проходящую через точку K и параллельную прямой MN . Каким еще прямым, изображенным на рисунке, эта прямая будет параллельна?

б) Еще раз изобразите трапецию $ABCD$, ее среднюю линию MN и точку P на MN . Известно, что в трапеции нет прямого угла. Через точку P проходит плоскость β , перпендикулярная прямой MN . Изобразите ее. Каким еще прямым, изображенным на рисунке, она перпендикулярна?

2. Изобразите пирамиду $PABC$. Пусть высота этой пирамиды PO находится внутри пирамиды. Изобразите ее. Изобразите точку K — середину PC и точку L — середину OC . Докажите, что $KL \perp (ABC)$.

Вариант 2

1. а) Изобразите параллелограмм $ABCD$, его среднюю линию MN и точку K вне плоскости параллелограмма. Изобразите прямую, проходящую через точку K и параллельную прямой MN . Каким еще прямым, изображенным на рисунке, эта прямая параллельна?

б) Еще раз изобразите параллелограмм $ABCD$, $\angle A \neq 90^\circ$, его среднюю линию MN и точку P на MN . Через точку P проходит плоскость β , перпендикулярная прямой MN . Изобразите ее. Каким еще прямым, изображенным на рисунке, она будет перпендикулярна?

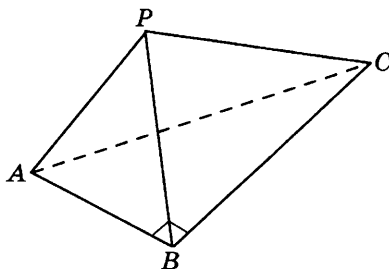
2. Изобразите пирамиду $PABC$. Пусть высота этой пирамиды PO находится внутри пирамиды. Изобразите ее. Изобразите точку K — середину PA и точку L — середину OA . Докажите, что $KL \perp (ABC)$.

С-16

К пп. 9.1—9.2

Вариант 1

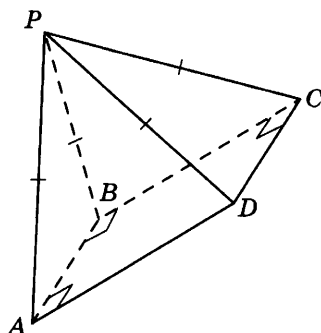
1. По данным рисунка изобразите перпендикуляр к плоскости (ABC) , проходящий через точку P . Найдите его длину, если $AB = 6$, $BC = 8$, $PC = 10\sqrt{2}$, а ребра PA , PB и PC пирамиды равны.



2. Изобразите $PABCD$ — правильную четырехугольную пирамиду и ее высоту PO . Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и перпендикулярной BD , считая, что все ребра этой пирамиды равны a .

Вариант 2

1. По данным рисунка изобразите перпендикуляр к плоскости (ABC) , проходящий через точку P . Найдите его длину, если $AB = 6$, $BC = 8$, $PC = 10\sqrt{2}$.



2. Изобразите $PABCD$ — правильную четырехугольную пирамиду и ее высоту PO . Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и перпендикулярной AC , считая, что все ребра этой пирамиды равны a .

С-17

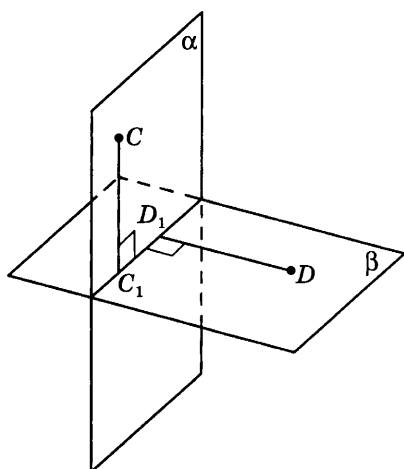
К п. 10.2

Вариант 1

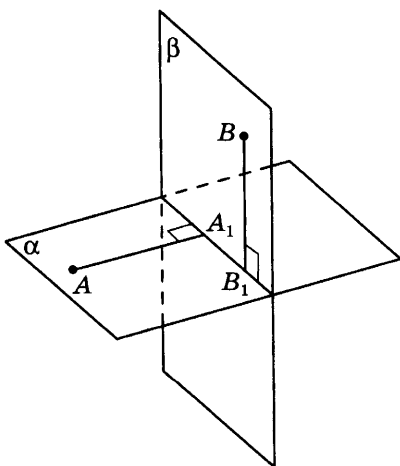
1. К плоскости треугольника ABC , у которого $\angle C = 90^\circ$, через точку C проведена прямая m , перпендикулярная к плоскости (ABC) . Докажите, что плоскость, определяемая прямой m и точкой A , перпендикулярна плоскости, определяемой точкой B и прямой m .
2. В пирамиде $PABC$ $(PAB) \perp (ABC)$. Площадь треугольника PAB равна 40, а $AB = 16$. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

1. К плоскости треугольника ABC , у которого $\angle B = 90^\circ$, через точку B проведена прямая n , перпендикулярная к плоскости (ABC) . Докажите, что плоскость, определяемая прямой n и точкой C , перпендикулярна плоскости, определяемой прямой n и точкой A .
2. В пирамиде $PABC$ $(PAC) \perp (ABC)$. Площадь треугольника PAC равна 40, а $AC = 20$. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 1

Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Точка C лежит в плоскости α , а точка D — в плоскости β . Отрезки CC_1 и DD_1 — перпендикуляры к линии пересечения плоскостей (C_1D_1). Найдите длину отрезка CD , если $CC_1 = DD_1 = 4$ и $C_1D_1 = 2$.

Вариант 2

Плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Точка A лежит в плоскости α , а точка B — в плоскости β . Отрезки AA_1 и BB_1 — перпендикуляры к линии пересечения плоскостей (A_1B_1). Найдите длину отрезка AB , если $AA_1 = BB_1 = A_1B_1 = 3$.

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O . PO — высота пирамиды, M — середина AD . Докажите, что: а) $(BPD) \perp (ABC)$; б) $AD \perp (PMO)$; в) $(PMO) \perp (PAD)$.
2. Изобразите пирамиду $PABC$, в основании которой лежит треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$. Две ее боковые грани, проходящие через AB и AC , перпендикулярны плоскости основания. Найдите высоту пирамиды, если $AC = 8$, $CB = 6$, $PB = 10\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. В пирамиде $PABC$ PB — высота, $PA = PC$, M — середина AC . Докажите, что: а) $(PBA) \perp (ABC)$; б) $AC \perp (PMB)$; в) $(PMB) \perp (APC)$.
2. Изобразите пирамиду $PABC$, в основании которой лежит треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$. Две ее боковые грани, проходящие через AB и AC , перпендикулярны плоскости основания. Найдите высоту пирамиды, если $AC = 4$, $CB = 3$, $PB = 5\sqrt{2}$.

Вариант 1

1. Прямые s и d перпендикулярны прямой a и проходят через точку O этой прямой. Прямые m и n тоже перпендикулярны прямой a , но проходят через точку P этой прямой. Может ли прямая m иметь общие точки с прямыми s и d ?
2. Плоскости α и β параллельны. Прямая a перпендикулярна плоскости α . Точка C лежит в плоскости β . Точки A и B — точки пересечения прямой a с плоскостями α и β соответственно. Найдите AB , если $AC = 7,5$, а $BC = 4,5$.

Вариант 2

1. Прямые s и d перпендикулярны прямой m и проходят через точку K этой прямой. Прямые a и b тоже перпендикулярны прямой m , но проходят через точку L этой прямой. Может ли прямая s иметь общие точки с прямыми a и b ?
2. Плоскости α и β параллельны. Прямая a перпендикулярна плоскости β . Точка D лежит в плоскости α . Точки A и B — точки пересечения прямой a с плоскостями α и β соответственно. Найдите AD , если $AB = 2,5$, а $BD = 6,5$.

Вариант 1

1. PO — высота пирамиды $PABC$. M — точка на ребре PA . Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной PO и проходящей через точку M .
2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной грани PDC и проходящей через точку O — точку пересечения диагоналей оснований (обоснования не нужны).
3. α, β, γ — три различные плоскости, a — прямая. $a \perp \alpha$, $a \perp \beta$, $\gamma \parallel \alpha$. Как расположены β и γ ?

Вариант 2

1. PO — высота пирамиды $PABC$. N — точка на ребре PB . Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной PO и проходящей через точку N .
2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, параллельной грани APD и проходящей через точку O — точку пересечения диагоналей оснований (обоснования не нужны).
3. α, β, γ — три различные плоскости, m — прямая. $m \perp \gamma$, $m \perp \beta$, $\beta \parallel \alpha$. Как расположены плоскости α и γ ?

Вариант 1

1. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α , а точка A не лежит в ней. M и K — точки сторон AB и AC соответственно, причем $AM : MB = 1 : 3$. $CK : AK = 3 : 1$.
а) Докажите, что $MK \parallel \alpha$. б) Пусть O — точка плоскости α , не лежащая на прямой BC . Изобразите линию пересечения плоскости $МОК$ и плоскости α .
2. Прямая a параллельна плоскости β . Прямые b и c лежат в плоскости β и пересекаются в точке M . Докажите, что хотя бы одна из них скрещивается с прямой a .

Вариант 2

1. Сторона KM треугольника KPM лежит в плоскости β , а точка P не лежит в ней. B и C — точки сторон PK и PM соответственно, причем $KB : BP = 2 : 1$. $PC : CM = 1 : 2$. а) Докажите, что $BC \parallel \beta$. б) Пусть O — точка плоскости β , не лежащая на прямой MK . Изобразите линию пересечения плоскости $МОК$ и плоскости α .
2. Прямая b параллельна плоскости α . Прямые a и c лежат в плоскости α и пересекаются. Верно ли утверждение, что прямая b скрещивается и с прямой a , и с прямой c ?
-

С-23

К пп. 12.1–12.2

Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и его сечение плоскостью $AA_1 M$, где M — середина ребра $B_1 C_1$.
2. Изобразите тетраэдр $PABC$ и точку M на ребре PC , такую, что $PM : MC = 1 : 2$. Изобразите сечение тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости (ABC) и проходящей через точку M . Пусть площадь треугольника ABC равна S . Чему равна площадь сечения?
3. Плоскости α и β параллельны. Прямая m лежит в плоскости α , а прямая n — в плоскости β . Каким может быть взаимное расположение прямых m и n ?
-

Вариант 2

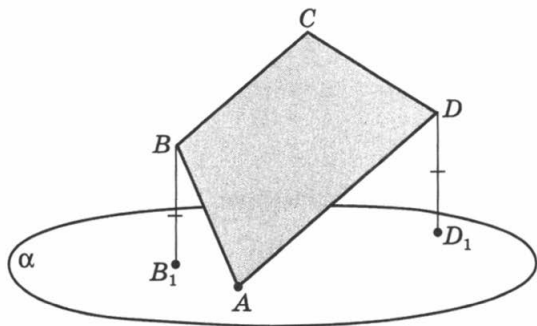
1. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и его сечение плоскостью $(AA_1 M)$, где M — середина ребра $C_1 D_1$.
2. Изобразите тетраэдр $PABC$ и точку M на ребре PC , такую, что $PM : MA = 1 : 3$. Изобразите сечение тетраэдра плоскостью, параллельной плоскости (ABC) и проходящей через точку M . Пусть площадь сечения равна S . Чему равна площадь основания?
3. Плоскости α и β параллельны. Прямая m пересекает плоскость α , а прямая n лежит в плоскости β . Каким может быть взаимное расположение прямых m и n ?
-

С-24
К п. 13.1
Вариант 1

1. Вершины треугольника ABC расположены вне плоскости α . $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, причем точки A_1 , B_1 и C_1 лежат в плоскости α . Известно, что $AA_1 = CC_1$ и $CC_1 < BB_1$.

а) Изобразите проекцию на плоскость α треугольника ABC и точки пересечения медиан треугольника ABC . б) Верны ли утверждения: 1) треугольник ABC и его проекция имеют равные стороны; 2) периметр треугольника ABC меньше периметра его проекции?

2. $ABCD$ — трапеция. Точка A лежит в плоскости α , а точки B , C и D не лежат в плоскости α . $BB_1 \perp \alpha$, $DD_1 \perp \alpha$, причем точки B_1 и D_1 лежат в плоскости α . Известно, что $BB_1 = DD_1$. Изобразите, используя свойства проекций, проекцию трапеции $ABCD$ на плоскость α .



3. Пусть четырехугольник $AB_1C_1D_1$ — проекция трапеции $ABCD$ из задачи 2. Верны ли следующие утверждения? Почему?

а) $AB_1C_1D_1$ — трапеция.

б) $AC = AC_1$.

в) $BD = B_1D_1$.

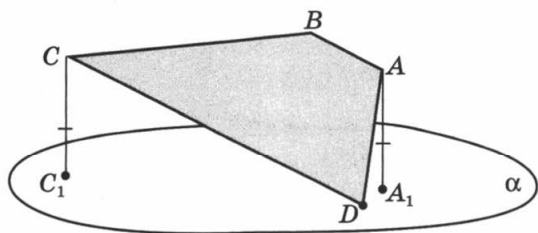
г) $P_{\triangle ACD} = P_{\triangle AC_1D_1}$.

Вариант 2

1. Вершины треугольника ABC расположены вне плоскости α . $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, причем точки A_1 , B_1 и C_1 лежат в плоскости α . Известно, что $AA_1 = BB_1$ и $CC_1 < AA_1$.

а) Изобразите проекцию на плоскость α треугольника ABC и точки пересечения медиан треугольника ABC . б) Верны ли утверждения: 1) треугольник ABC и его проекция имеют равные стороны; 2) периметр треугольника ABC больше периметра его проекции?

2. $ABCD$ — трапеция. Точка D лежит в плоскости α , а точки B , C и A не лежат в плоскости α . $AA_1 \perp \alpha$, $CC_1 \perp \alpha$, причем точки A_1 и C_1 лежат в плоскости α . Известно, что $AA_1 = CC_1$. Изобразите проекцию трапеции $ABCD$ на плоскость α .



3. Пусть четырехугольник $A_1B_1C_1D$ — проекция трапеции $ABCD$ из задачи 2. Верны ли следующие утверждения? Почему?

а) $A_1B_1C_1D$ — трапеция.

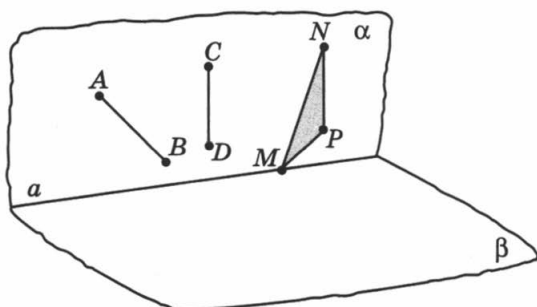
б) $AC = A_1C_1$.

в) $BD = B_1D$.

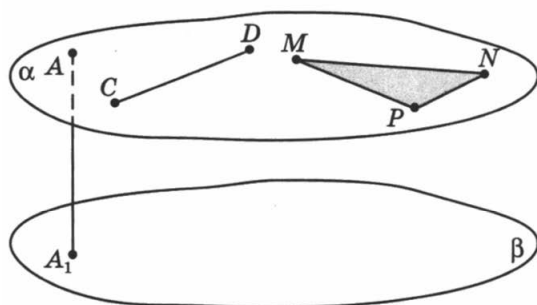
г) $P_{\triangle ACD} = P_{\triangle A_1C_1D}$.

Вариант 1

1. Плоскости α и β перпендикулярны, a — линия их пересечения. Точки A, B, C, D, N, P и M лежат в плоскости α , причем только прямая $CD \perp a$. Изобразите проекции на плоскость β отрезков AB, CD и треугольника MNP .

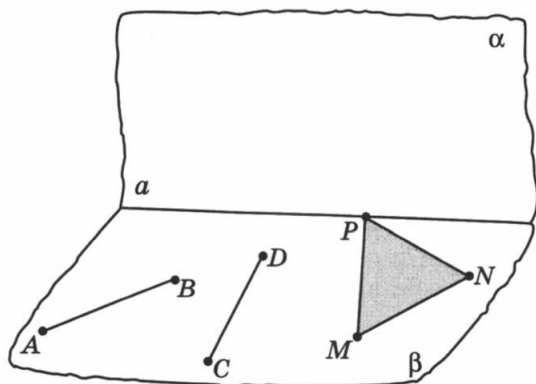


2. Плоскости α и β параллельны, $AA_1 \perp \beta$. Точки A, C, D, N, P и M лежат в плоскости α , точка A_1 лежит в плоскости β . Изобразите проекции на плоскость β отрезка CD и треугольника MNP .

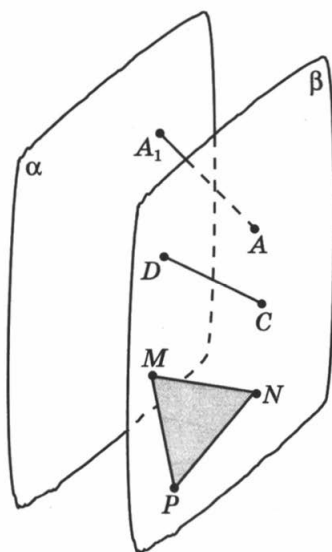


Вариант 2

1. Плоскости α и β перпендикулярны, a — линия их пересечения. Точки A, B, C, D, N, P и M лежат в плоскости β , причем только прямая $CD \perp a$. Изобразите проекции на плоскость α отрезков AB, CD и треугольника MNP .



2. Плоскости α и β параллельны, $AA_1 \perp \alpha$. Точки A, C, D, N, P и M лежат в плоскости β , точка A_1 лежит в плоскости α . Изобразите проекции на плоскость α отрезка CD и треугольника MNP .



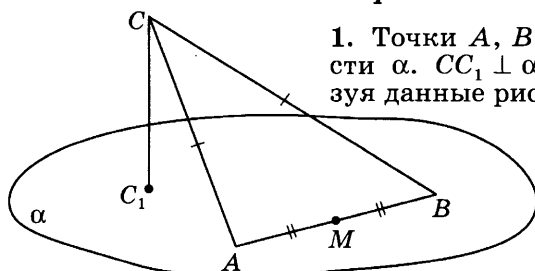
Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть ребро куба равно 6. Найдите расстояния между точками: а) B_1 и C ; б) M и D , где M — середина $C_1 D_1$; в) A_1 и O , где O — центр квадрата $ABCD$.
2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ и точку O пересечения диагоналей основания. Найдите расстояние от точки P до точки O , если сторона основания равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5.

Вариант 2

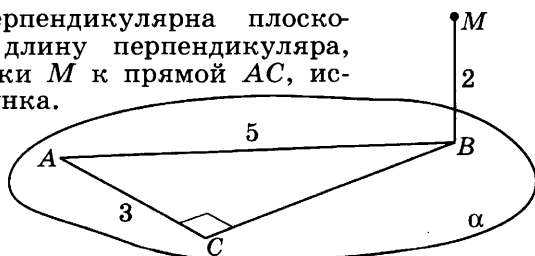
1. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть ребро куба равно 8. Найдите расстояния между точками: а) B_1 и A ; б) M и C , где M — середина $C_1 D_1$; в) B_1 и O , где O — центр квадрата $ABCD$.
2. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ и точку O пересечения диагоналей основания. Найдите расстояние от точки P до точки O , если сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5.

Вариант 1



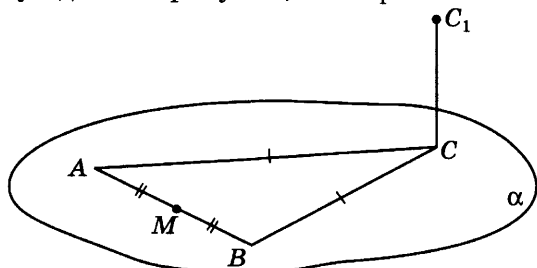
1. Точки A , B и C_1 лежат в плоскости α . $CC_1 \perp \alpha$. Докажите, используя данные рисунка, что $C_1 M \perp AB$.

2. Прямая MB перпендикулярна плоскости ABC . Найдите длину перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой AC , используя данные рисунка.

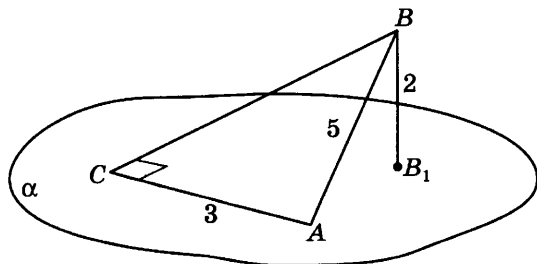


Вариант 2

1. Точки A , B и C_1 лежат в плоскости α . $CC_1 \perp \alpha$. Докажите, используя данные рисунка, что $C_1M \perp AB$.



2. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из точки B_1 к прямой AC , если $BB_1 \perp \alpha$, точки B_1 , A и C лежат в плоскости α , а точка B не лежит в плоскости α .

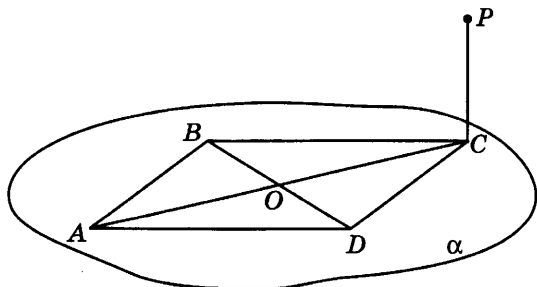


C-28

К п. 13.2

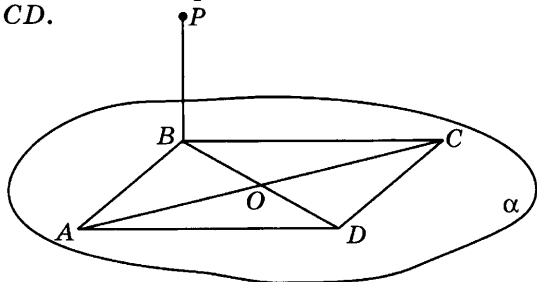
Вариант 1

- $ABCD$ — прямоугольник, в котором точка O — точка пересечения диагоналей, треугольник COD правильный, со стороной 4. Прямая CP перпендикулярна плоскости ABC . $PC = 3$. Найдите расстояние от точки P до прямых AC , AD и BD .



Вариант 2

$ABCD$ — ромб, в котором треугольник ABD правильный, со стороной 6. Прямая BP перпендикулярна плоскости ABC . $BP = 4$. Найдите расстояние от точки P до прямых AB , AC и CD .



C-29

К пп. 14.1–14.3

Вариант 1

$ABCD$ — прямоугольник. Сторона AD лежит в плоскости α , а точка C не лежит в этой плоскости. Найдите расстояния до плоскости α от прямых AB и BC и от точки M — середины AB , если $AB = 5\sqrt{2}$ и отрезок AB образует со своей проекцией на плоскость α угол 45° .

Вариант 2

$ABCD$ — прямоугольник. Сторона AB лежит в плоскости α , а точка C не лежит в этой плоскости. Найдите расстояния до плоскости α от прямых AD и DC и от точки M — середины AD , если $AD = 4\sqrt{3}$ и отрезок AD образует со своей проекцией на плоскость α угол 60° .

C-30

К пп. 14.1–14.3

Вариант 1

1. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α , а основание BC отстоит от нее на 10 см. Сделайте рисунок. Найдите расстояние от точки M — точки пересечения диагоналей трапеции до плоскости α , если $BC : AD = 1 : 3$.

2. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точки M , K и P — середины ребер AD , DC и $D_1 C_1$ соответственно. Найдите расстояния между плоскостями $AA_1 C_1$ и MKP , считая, что ребро куба $5\sqrt{2}$ см.

Вариант 2

1. Основание BC трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α , а основание AD отстоит от нее на 12 см. Сделайте рисунок. Найдите расстояние от точки M пересечения диагоналей трапеции до плоскости α , если $AD : BC = 4 : 1$.

2. Изобразите куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точки M, N и P — середины ребер AD, AB и $A_1 B_1$ соответственно. Найдите расстояния между плоскостями $(BB_1 D_1)$ и (MNP) , считая, что ребро куба $6\sqrt{2}$ см.

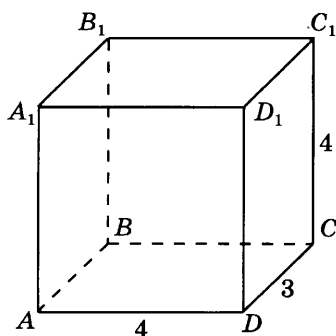
С-31

К пп. 15.2—15.3

Вариант 1

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, длины сторон которого указаны на рисунке. Найдите величину угла или значение какой-либо тригонометрической функции для угла между прямыми:

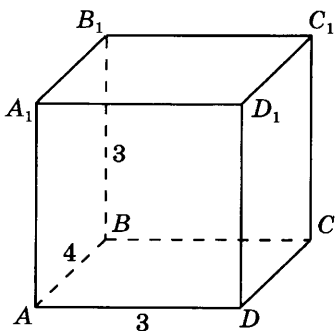
- а) AA_1 и CD ;
- б) AA_1 и CC_1 ;
- в) AB_1 и DC ;
- г) $A_1 D$ и AB ;
- д) $B_1 D$ и BB_1 ;
- е) $B_1 C$ и AD .



Вариант 2

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, длины сторон которого указаны на рисунке. Найдите величину угла или значение какой-либо тригонометрической функции для угла между прямыми:

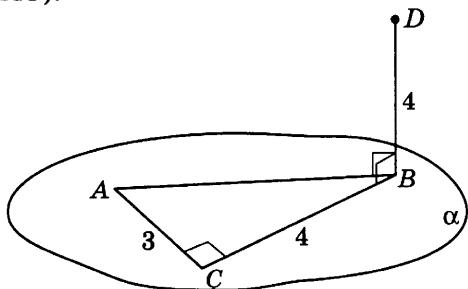
- а) CC_1 и AB ;
- б) BB_1 и DD_1 ;
- в) $B_1 C$ и AD ;
- г) $D_1 C$ и AB ;
- д) BD_1 и DD_1 ;
- е) BC и $A_1 D$.



Вариант 1

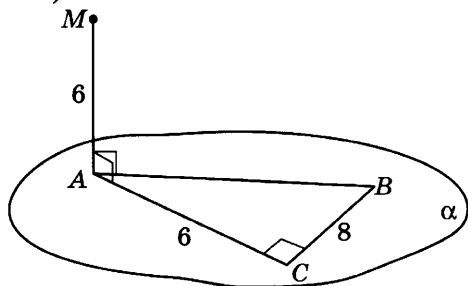
По данным рисунка найдите величину или укажите значение какой-либо тригонометрической функции угла между прямой и плоскостью:

- а) $\angle(DB; \alpha)$;
- б) $\angle(AB; \alpha)$;
- в) $\angle(DA; \alpha)$;
- г) α и прямой, перпендикулярной к AC , проведенной из точки D ;
- д) $\angle((DBC); AC)$.

**Вариант 2**

По данным рисунка найдите величину или укажите значение какой-либо тригонометрической функции угла между прямой и плоскостью:

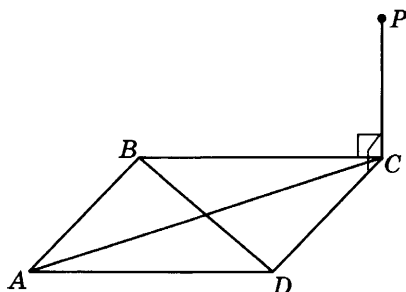
- а) $\angle(AM; \alpha)$;
- б) $\angle(MB; \alpha)$;
- в) $\angle(BC; \alpha)$;
- г) α и прямой, перпендикулярной к BC , проведенной из точки M ;
- д) $\angle((MAC); BC)$.



Вариант 1

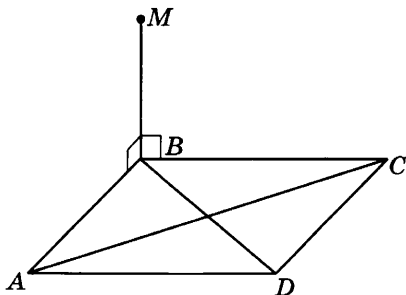
$ABCD$ — ромб, в котором $BD = 6$. CP — перпендикуляр к плоскости (ABC) . $CP = 3$, а расстояние от точки P до прямой BD равно 5. Найдите угол (или значение какой-либо его тригонометрической функции) между прямой и плоскостью:

- а) $\angle(PC; (ABC))$;
- б) $\angle(PA; (ABC))$;
- в) $\angle(PD; (ABC))$;
- г) $\angle(BD; (APC))$.

**Вариант 2**

$ABCD$ — ромб, в котором $AC = 8$. BM — перпендикуляр к плоскости (ABC) . $BM = 4$, а расстояние от точки M до прямой AC равно 5. Найдите угол (или значение какой-либо его тригонометрической функции) между прямой и плоскостью:

- а) $\angle(BM; (ABC))$;
- б) $\angle(MD; (ABC))$;
- в) $\angle(MA; (ABC))$;
- г) $\angle(AC; (MBD))$.



Вариант 1

1. Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α , а вершина C удалена от плоскости α на 6 см. Известно, что $CA = CB = 13$ см, $AB = 10$ см. Какова величина угла между плоскостями (ABC) и α ?
2. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α , а точка C находится на расстоянии $2,4\sqrt{2}$ см от плоскости α , $CA = 6$ см, $CB = 8$ см. Докажите, что $\angle((ACB); \alpha) = 45^\circ$.

Вариант 2

1. Сторона BC треугольника ABC лежит в плоскости α , а вершина C удалена от плоскости α на 2,5 см. Известно, что $AC = AB = 13$ см, $BC = 24$ см. Какова величина угла между плоскостями (ABC) и α ?
2. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α , $CA = 8$ см, $CB = 6$ см. Докажите, что если $\angle((ACB); \alpha) = 60^\circ$, то вершина C удалена от плоскости α на $2,4\sqrt{3}$ см.

Вариант 1

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4, а высота равна 3. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна $4\sqrt{3}$. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6, а высота равна 4. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12, а высота равна $4\sqrt{3}$. Найдите тангенсы углов наклона бокового ребра к плоскости основания и боковой грани к плоскости основания.

Вариант 1

1. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC , у которого $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Через сторону AC проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания, пересекающая противоположащее боковое ребро в точке D . Определите площадь сечения призмы плоскостью (ACD) и длину отрезка BD .

2. Точки M , N и P делят соответственно ребра AA_1 , BB_1 и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ в отношении $3 : 1$, $1 : 3$ и $3 : 1$, считая от основания $A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите сечение куба плоскостью (MNP) . Каково взаимное расположение следующих прямых и плоскостей: а) MN и $A_1 D_1$; б) MN и линии пересечения плоскостей (MNP) и $(DD_1 C_1)$; в) MN и $(DD_1 C_1 C)$; г) $B_1 C_1$ и (MNP) ?

Вариант 2

1. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC , у которого $AB = BC = 7$ см, $AC = 2$ см. Через сторону AC проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания, пересекающая противоположащее боковое ребро в точке D . Определите площадь сечения призмы плоскостью (ACD) и длину отрезка BD .

2. Точки M , N и P делят соответственно ребра BB_1 , CC_1 и DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ в отношении $3 : 1$, $1 : 3$ и $3 : 1$, считая от основания $A_1 B_1 C_1 D_1$. Изобразите сечение куба плоскостью (MNP) . Каково взаимное расположение следующих прямых и плоскостей: а) MN и $A_1 B_1$; б) MN и линии пересечения плоскостей (MNP) и $(AA_1 D_1)$; в) MN и $(AA_1 D_1)$; г) $B_1 C_1$ и (MNP) ?

Вариант 1

В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 16$. Вне плоскости (ABC) взята точка M . Оказалось, что $MA = MB = MC = 10\sqrt{2}$. На каком расстоянии находится точка M от: а) плоскости (ABC) ; б) прямой BC ? Найдите величины углов или укажите значения какой-либо их тригонометрической функции: а) $\angle(MB; (ABC))$; б) $\angle(MC; (ABC))$; в) $\angle((MAB); (ABC))$; г) $\angle((MBC); (ABC))$.

Вариант 2

В треугольнике ABC : $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 16$. Вне плоскости (ABC) взята точка M . Оказалось, что она удалена от плоскости (ABC) на 10 и равноудалена от всех вершин треугольника ABC . На каком расстоянии находится точка M от: а) вершин треугольника ABC ; б) прямой BC ? Найдите величины углов или укажите значения какой-либо их тригонометрической функции: а) $\angle(MA; (ABC))$; б) $\angle(MC; (ABC))$; в) $\angle((MAB); (ABC))$; г) $\angle((MAC); (ABC))$.

C-38

К повторению

Вариант 1

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а высота равна 4. Найдите косинусы углов между: а) боковым ребром и плоскостью основания; б) боковой гранью и плоскостью основания; в) двумя соседними боковыми гранями; г*) двумя противоположными боковыми гранями.

Вариант 2

Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а высота равна 3. Найдите косинусы углов между: а) боковым ребром и плоскостью основания; б) боковой гранью и плоскостью основания; в) двумя соседними боковыми гранями; г*) двумя противоположными боковыми гранями.

**ГЛАВА IV ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ
ФИГУРЫ****С-1****К пп. 16.1—16.3****Вариант 1**

1. Плоскость α проходит через центр шара. Длина линии пересечения плоскости α и поверхности шара равна 6π см. Чему равны диаметр сферы и площадь сечения шара плоскостью α ?
2. Плоскость, пересекающая шар, удалена от центра шара на 3 см. Прямоугольный треугольник, вписанный в сечение шара этой плоскостью, имеет гипотенузу, равную 8 см. Чему равен диаметр шара?

Вариант 2

1. Плоскость α проходит через центр шара. Площадь сечения шара плоскостью α равна 16π см². Чему равны диаметр шара и длина линии пересечения плоскости α с поверхностью шара?
2. Плоскость, пересекающая шар, удалена от центра шара на 4 см. Прямоугольный треугольник, вписанный в сечение шара этой плоскостью, имеет гипотенузу, равную 6 см. Чему равен диаметр шара?

С-2**К п. 16.3****Вариант 1**

1. Сфера касается плоскости α в точке M . На плоскости α взята точка K , удаленная от точки M на 12, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?
2. Две параллельные плоскости α и β касаются сферы с центром O . Прямая a проходит через центр сферы, образует с плоскостью α угол 45° и пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно. $AB = 10\sqrt{2}$. Найдите радиус шара.

Вариант 2

1. Сфера касается плоскости α в точке P . На плоскости α взята точка K , удаленная от точки P на 5, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?
 2. Две параллельные плоскости α и β касаются сферы с центром O . Прямая a проходит через центр сферы, образует с плоскостью α угол 60° и пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно. $AB = 10\sqrt{3}$. Найдите радиус шара.
-

С-3

К пп. 16.1—16.4

Вариант 1

1. Плоскости α и β параллельны. Одна из них касается шара, а другая пересекает его. Найдите площадь сечения шара указанной плоскостью, если расстояние между плоскостями равно 32, а радиус шара 41.
 2. AB — диаметр сферы, AC — хорда сферы. Найдите расстояние от точки B до точки C , если $AB = 41$, $AC = 9$.
-

Вариант 2

1. Плоскости α и β параллельны. Одна из них касается шара, а другая пересекает его. Найдите площадь сечения шара указанной плоскостью, если расстояние между плоскостями равно 50, а радиус шара 41.
 2. AB — диаметр сферы, BC — хорда сферы. Найдите расстояние от точки A до точки C , если $AB = 41$, $BC = 40$.
-

С-4

К п. 18.3

Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат с площадью $2,56 \text{ дм}^2$. Найдите площадь основания цилиндра.
 2. Высота цилиндра 8 м, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси. На каком расстоянии от оси проведено сечение, если это сечение — квадрат?
-

Вариант 2

1. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите его площадь, если площадь основания цилиндра $1,69\pi$ дм².
 2. Радиус основания цилиндра 10 дм. На расстоянии 8 дм от оси проведено сечение, параллельное оси цилиндра. Это сечение — квадрат. Найдите высоту цилиндра.
-

С-5

К п. 18.3

Вариант 1

Прямоугольник, стороны которого 5 дм и 6 дм, вращается вокруг большей стороны. Найдите длину диагонали осевого сечения получившегося цилиндра и тангенс угла наклона этой диагонали к основанию цилиндра.

Вариант 2

Прямоугольник, стороны которого 5 дм и 6 дм, вращается вокруг меньшей стороны. Найдите длину диагонали осевого сечения получившегося цилиндра и синус угла наклона этой диагонали к основанию цилиндра.

С-6

К п. 19.2

Вариант 1

- В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг меньшего катета, найдите:
- а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности;
 - б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 1,5 см;
 - в) площадь осевого сечения.
-

Вариант 2

- В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета, найдите:
- а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности;
 - б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 2 см;
 - в) площадь осевого сечения.
-

Вариант 1

1. Осевое сечение конуса — правильный треугольник. Найдите его площадь, если площадь основания конуса 4π см².
2. Вершина конуса — точка P . Хорда AB основания конуса стягивает дугу в 60° . Угол между плоскостью PAB и плоскостью основания конуса равен α . Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если радиус основания равен R , а высота конуса $R\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. Осевое сечение конуса — правильный треугольник, площадь которого $4\sqrt{3}$ см². Найдите площадь основания конуса.
2. Вершина конуса — точка P . Хорда AB основания конуса стягивает дугу в 90° . Угол между плоскостью PAB и плоскостью основания конуса равен α . Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если радиус основания равен R , а высота конуса $R\sqrt{3}$.

Вариант 1

1. В конусе сечение, параллельное основанию, делит его высоту в отношении $2 : 3$. Чему равна площадь сечения, если площадь основания 50 см²?
2. Образующая поверхности конуса наклонена к основанию под углом 60° . Найдите радиус шара, вписанного в этот конус, если высота конуса равна H .

Вариант 2

1. В конусе сечение, параллельное основанию, делит его высоту в отношении $2 : 5$. Чему равна площадь основания, если площадь сечения 8 см²?
2. Образующая поверхности конуса наклонена к основанию под углом 60° . Найдите радиус шара, вписанного в этот конус, если радиус основания конуса равен R .

Вариант 1

1. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой равнобедренный треугольник.
2. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой ромб с углом 45° .
3. Изобразите развертку прямоугольного параллелепипеда, измерения которого a , $1,5a$ и $2a$.

Вариант 2

1. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой прямоугольный треугольник.
2. Изобразите развертку прямой призмы, в основании которой равнобедренная трапеция с углом 45° .
3. Изобразите развертку прямоугольного параллелепипеда, измерения которого m , $2m$ и $2,5m$.

Вариант 1

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 6, а высота 8. Диагональ $B_1 D$ наклонена к основанию $ABCD$ под углом α , а к боковой грани $DD_1 C_1 C$ под углом β . Найдите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\sin \beta$.
2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 6, а высота 8. Диагональ $B_1 D$ наклонена к основанию ABC под углом α , а к боковой грани $AA_1 B_1 B$ под углом β . Найдите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\sin \beta$.

Вариант 2

1. Сторона основания правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 8, а высота 6. Диагональ DB_1 наклонена к основанию $ABCD$ под углом α , а к боковой грани $AA_1 B_1 B$ под углом β . Найдите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\sin \beta$.
2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 8, а высота 6. Диагональ BA_1 боковой грани $BB_1 A_1 A$ наклонена к основанию ABC под углом α , а к боковой грани $CC_1 B_1 B$ под углом β . Найдите $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$.

Вариант 1

1. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояния от бокового ребра AA_1 до двух других боковых ребер BB_1 и CC_1 равны 4 и 7. Боковые грани AA_1B_1B и AA_1C_1C образуют между собой двугранный угол 120° . Найдите расстояние между ребрами BB_1 и CC_1 .
2. В прямой треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 5, 7 и 10. Докажите, что в основании такой призмы тупоугольный треугольник.

Вариант 2

1. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 5, 8 и 10. Докажите, что один из двугранных углов, образованных боковыми гранями, тупой.
2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояния от бокового ребра BB_1 до двух других боковых ребер AA_1 и CC_1 равны 5 и 7. Боковые грани BB_1C_1C и BB_1A_1A образуют между собой двугранный угол 120° . Найдите расстояние между ребрами AA_1 и CC_1 .

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (B_1C_1D) к плоскости $(ABCD)$.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 4$, $AD = 5$, $\angle A = 45^\circ$. Высота параллелепипеда равна $3\sqrt{2}$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (B_1C_1D) к плоскости $(ABCD)$.

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 2$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (A_1B_1C) к плоскости $(ABCD)$.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб $ABCD$, в котором $AB = 6$. $\angle A = 60^\circ$. Высота параллелепипеда равна $4\sqrt{3}$. Найдите тангенс угла наклона плоскости (A_1B_1C) к плоскости $(ABCD)$.

Вариант 1

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8, а радиус описанной вокруг основания окружности равен 6. Найдите: а) длину стороны основания; б) длину бокового ребра; в) длину апофемы; г) синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания; д) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

2. В пирамиде $PABC$ грани ABP и ABC взаимно перпендикулярны. Найдите длину высоты пирамиды, проведенной из точки P , если $PA = PB = AB = 4$.

Вариант 2

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10, а радиус вписанной в основание окружности равен 4. Найдите: а) длину стороны основания; б) высоту пирамиды; в) длину апофемы; г) синус угла наклона бокового ребра к плоскости основания; д) тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания.

2. В пирамиде $MABC$ грани MBC и ABC взаимно перпендикулярны. Найдите длину высоты пирамиды, проведенной из точки M , если $MB = MC = 4\sqrt{2}$ и $\angle BMC = 90^\circ$.

Вариант 1

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M — середину AB , N — середину BC , параллельно ребру PD . Определите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро равно $8\sqrt{2}$.

Вариант 2

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M — середину CB , N — середину CD , параллельно ребру PA . Определите площадь сечения, если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 8.

Вариант 1

Диагональ осевого сечения цилиндра вращения равна 10, отношение радиуса основания к высоте цилиндра равно 3 : 8. Найдите:

- а) объем цилиндра;
- б) объем призмы, одной из боковых граней которой является осевое сечение цилиндра, а в основании лежит равнобедренный треугольник, вписанный в основание цилиндра.

Вариант 2

Диагональ осевого сечения цилиндра вращения равна 20, отношение высоты цилиндра к радиусу основания равно 3 : 2. Найдите:

- а) объем цилиндра;
- б) объем призмы, одной из боковых граней которой является осевое сечение цилиндра, а в основании лежит треугольник с углом 30° , вписанный в основание цилиндра.

Вариант 1

В основании прямой призмы лежит треугольник ABC , в котором $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60^\circ$. Сечение A_1BC наклонено к основанию под углом α , тангенс которого равен $\sqrt{7}$. Докажите, что объем призмы равен 108.

Вариант 2

В основании прямой призмы лежит треугольник ABC , в котором $BC = 6$, $BA = 8$, $\angle B = 120^\circ$. Объем призмы равен 84. Пусть сечение призмы плоскостью (B_1AC) наклонено к основанию под углом α . Докажите, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{13}{14}$.

Вариант 1

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна a и образует с боковой гранью, являющейся квадратом, угол 45° .

Докажите, что объем этого параллелепипеда равен $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

2. Все ребра наклонной треугольной призмы равны 4 см, а объем этой призмы 24 см^3 . Докажите, что угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60° .

Вариант 2

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна m и образует с боковой гранью, являющейся квадратом, угол 60° .

Докажите, что объем этого параллелепипеда равен $\frac{\sqrt{3}}{16}m^3$.

2. Все ребра наклонной треугольной призмы равны 6 см, а объем этой призмы $27\sqrt{6} \text{ см}^3$. Докажите, что угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 45° .

Вариант 1

1. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° . Определите объем конуса, если его образующая равна l .

2. В пирамиде $PABC$ грани PAB и ABC взаимно перпендикулярны. В треугольнике PAB $\angle P = 90^\circ$, $PA = PB = 2$. Треугольник ABC — правильный. Найдите объем пирамиды $PABC$.

Вариант 2

1. Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° . Определите объем конуса, если его высота равна h .

2. В пирамиде $PABC$ грани PAB и ABC взаимно перпендикулярны. В треугольнике PAB $PA = PB = AB = 4$, в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Найдите объем пирамиды $PABC$.

Вариант 1

1. Все боковые ребра пирамиды равны 13. В основании пирамиды — прямоугольник с диагональю 24 и углом между диагоналями 30° . Найдите объем пирамиды.
2. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . В основании пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 8. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Все боковые ребра пирамиды равны 17. В основании пирамиды — прямоугольник, площадь которого $225\sqrt{3}$, а угол между диагоналями 60° . Найдите объем пирамиды.
2. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . В основании пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите объем пирамиды.

Вариант 1

1. Площадь сечения, удаленного от центра шара на 4 см, равна 9π см². Найдите объем шара.
2. В конус, осевое сечение которого правильный треугольник со стороной a , вписан шар. Докажите, что объем шара V вычисляется по формуле $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54}$.

Вариант 2

1. Объем шара равен $\frac{500\pi}{3}$ см³. Найдите площадь сечения, удаленного от центра на 3 см.
2. Вокруг конуса, осевое сечение которого правильный треугольник со стороной a , описан шар. Докажите, что объем шара V вычисляется по формуле $V = \frac{4\pi a^3 \sqrt{3}}{27}$.

Вариант 1

1. Высота конуса равна 12, а его образующая равна 13. Конус пересечен плоскостью, параллельной плоскости его основания и делящей его высоту в отношении $1 : 4$, считая от вершины. Найдите объем получившегося усеченного конуса.
2. В пирамиде $PABC$ отрезок PO — высота, а точка K , лежащая на высоте PO , делит ее в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Через точку K проведено сечение, параллельное основанию. Какую часть объем усеченной пирамиды составляет от объема пирамиды $PABC$?

Вариант 2

1. Радиус основания конуса равен 5, а образующая его равна 13. Конус пересечен плоскостью, параллельной плоскости его основания и делящей его высоту в отношении $2 : 3$, считая от вершины. Найдите объем получившегося усеченного конуса.
2. В пирамиде $PABC$ отрезок PO — высота, а точка K , лежащая на PO , делит ее в отношении $1 : 3$, считая от вершины. Через точку K проведено сечение, параллельное основанию. Какую часть объем усеченной пирамиды составляет от объема пирамиды $PABC$?

Вариант 1

1. Объем шара равен 36π см³. Найдите площадь поверхности шара.
2. Металлический цилиндр, радиус основания которого 2 см, а высота 9 см, переплавили в шар. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант 2

1. Площадь поверхности шара равна 36π см². Найдите объем шара.
2. Металлический конус, радиус основания которого 2 см, а высота 8 см, переплавили в шар. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант 1

1. В основании прямой призмы лежит треугольник, одна из сторон которого $2\sqrt{2}$ см, а противолежащий ей острый угол равен 45° . Высота призмы равна 5. Найдите площадь поверхности цилиндра, описанного вокруг такой призмы.
2. Основанием цилиндра служит круг, вписанный в ромб со стороной $4\sqrt{3}$ и углом 60° . Высота цилиндра равна диаметру основания. Найдите площадь поверхности цилиндра.

Вариант 2

1. В основании прямой призмы лежит треугольник, одна из сторон которого $2\sqrt{3}$ см, а противолежащий ей острый угол равен 60° . Высота призмы равна 5. Найдите площадь поверхности цилиндра, описанного вокруг такой призмы.
2. Основанием цилиндра служит круг, вписанный в ромб со стороной $6\sqrt{2}$ и углом 45° . Высота цилиндра равна диаметру основания. Найдите площадь поверхности цилиндра.

Вариант 1

1. Образующая конуса равна 10 и наклонена к основанию под углом α , тангенс которого равен $\frac{3}{4}$. Найдите площадь поверхности конуса.
2. Объем конуса равен 96π см³. Отношение высоты этого конуса к радиусу основания равно $4 : 3$. Докажите, что площадь поверхности конуса равна 96π см².

Вариант 2

1. Образующая конуса равна 13 и наклонена к основанию под углом β , тангенс которого равен $\frac{12}{13}$. Найдите площадь поверхности конуса.
2. Площадь поверхности конуса равна 96π см². Отношение образующей поверхности этого конуса к радиусу основания равно $5 : 3$. Докажите, что объем конуса равен 96π см³.

С-25**К пп. 28.2—28.3****Вариант 1**

Металлический конус, радиус основания которого равен 2 см, а высота 8 см, переплавлен в шар. Сравните площади поверхностей конуса и шара.

Вариант 2

Металлический цилиндр, радиус основания которого равен 2 см, а высота 9 см, переплавлен в шар. Сравните площади поверхностей цилиндра и шара.

С-26**К пп. 28.1—28.3****Вариант 1**

1. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны a .
2. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$, если сторона основания ее равна a , а боковая грань наклонена к основанию под углом 45° . Верно ли, что площадь поверхности пирамиды $PABC$ вдвое меньше площади поверхности пирамиды $PABCD$?

Вариант 2

1. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если диагональ боковой грани равна d , а высота призмы составляет $0,6$ этой диагонали. Верно ли, что площадь поверхности призмы $ABDA_1 B_1 D_1$ вдвое меньше площади поверхности данной призмы?
2. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания ее равна a , а боковая грань наклонена к основанию под углом 60° .

Вариант 1

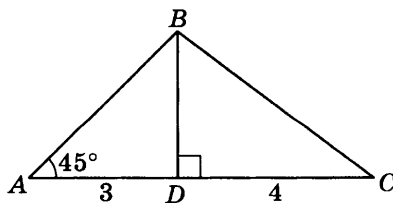
Сторона основания правильной треугольной призмы равна a . Диагональ боковой грани образует с другой боковой гранью угол 45° . Докажите, что объем этой призмы равен $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$, а площадь полной поверхности $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{6})$.

Вариант 2

Диагональ боковой грани равна d и образует с другой боковой гранью угол 30° . Докажите, что объем этой призмы равен $\frac{d^3\sqrt{2}}{12}$, а площадь полной поверхности $\frac{d^2\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{24})}{6}$.

Вариант 1

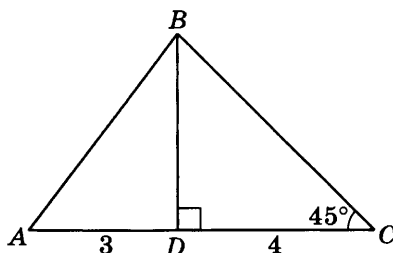
1. Все боковые ребра треугольной пирамиды равны и наклонены к плоскости основания под углом α , тангенс которого равен $\frac{8}{13}$. В основании ее лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите объем пирамиды.
2. Используя данные рисунка, найдите площадь поверхности тела, полученного вращением треугольника ABC вокруг стороны AC .



Вариант 2

1. Все боковые грани треугольной пирамиды наклонены к основанию под углом, тангенс которого равен 2. В основании ее лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найдите объем пирамиды.

2. Используя данные рисунка, найдите площадь поверхности тела, полученного вращением треугольника ABC вокруг стороны AC .



C-29

К пп. 28.1—28.3

Вариант 1

1. В основании наклонной треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной 6. Боковое ребро, равное 10, образует с основанием угол 60° . Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме боковое ребро AA_1 , равное 10, удалено от ребер BB_1 и CC_1 на расстояния 6 и 4. Грани AA_1B_1B и AA_1C_1C образуют угол 60° . Найдите объем призмы и площадь ее боковой поверхности.

Вариант 2

1. В основании наклонной четырехугольной призмы лежит ромб со стороной 6, один из углов которого равен 60° . Боковое ребро, равное $5\sqrt{2}$, образует с основанием угол 45° . Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме боковое ребро BB_1 , равное $2\sqrt{3}$, удалено от ребер AA_1 и CC_1 на расстояния 7 и 8. Грани AA_1B_1B и BB_1C_1C образуют угол 120° . Найдите объем призмы и площадь ее боковой поверхности.
-

Вариант 1

1. Боковые ребра тетраэдра попарно перпендикулярны и равны 4 м, 5 м и 6 м. Найдите площадь поверхности тетраэдра и его объем.
2. В конусе проведено сечение, параллельное основанию и делящее высоту пополам. Какую часть площади боковой поверхности конуса составляет боковая поверхность усеченного конуса?

Вариант 2

1. Боковые ребра тетраэдра попарно перпендикулярны и равны 5 дм, 6 дм и 8 дм. Найдите площадь поверхности тетраэдра и его объем.
2. В конусе проведено сечение, параллельное основанию и делящее высоту пополам. Какую часть объема конуса составляет объем усеченного конуса?

Вариант 1

Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, периметр основания которых 24 см, а высота в 2 раза меньше одной из сторон основания. Обозначив высоту параллелепипеда h , выразите объем параллелепипеда как функцию от h . Найдите размеры того параллелепипеда, у которого наибольший объем.

Вариант 2

Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, периметр основания которых 18 см, а одна из сторон основания в 2 раза меньше высоты параллелепипеда. Обозначив длину одной из сторон основания параллелепипеда a , выразите объем параллелепипеда как функцию от a . Найдите размеры того параллелепипеда, у которого наибольший объем.

С-32**К пп. 29.2—29.3****Вариант 1**

1. Изобразите координатную прямую Ox и на ней точки $A(-3)$, $B(\sqrt{2})$, $C(1)$, $D(5)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
2. Изобразите систему координат xOy и на ней точки $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$, $C(5; -1)$, $D(1; -4)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
3. Изобразите систему координат xOy и в ней точки $A(-3; 2; 4)$, $B(2; -3; -5)$, $C(4; 2; 0)$. Сравните расстояния $|AC|$ и $|BC|$.
4. Даны координаты трех точек: $B(1; 3; 2)$, $C(-1; 3; 4)$, $A(t; 0; 0)$. При каких значениях t треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C ?

Вариант 2

1. Изобразите координатную прямую Ox и на ней точки $A(-5)$, $B(-1)$, $C(\sqrt{3})$, $D(5)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
2. Изобразите систему координат xOy и на ней точки $A(-1; 5)$, $B(-4; 1)$, $C(2; -3)$, $D(5; 1)$. Сравните расстояния $|AB|$ и $|CD|$.
3. Изобразите систему координат xOy и в ней точки $A(-2; 3; -4)$, $B(3; -2; 5)$, $C(-2; -4; 0)$. Сравните расстояния $|AC|$ и $|BC|$.
4. Даны координаты трех точек: $B(2; 3; 1)$, $C(4; 3; -1)$, $A(0; 0; t)$. При каких значениях t треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C ?

С-33**К пп. 29.4—29.5****Вариант 1**

1. Напишите уравнение окружности на плоскости xOy с центром в точке $A(-2; 3)$ радиуса 2.
2. Напишите уравнение сферы в системе координат xOy с центром в точке $A(-2; 3; 1)$ радиуса 3.
3. Какую фигуру задает уравнение $x^2 + (y - 4)^2 = 2$: а) на плоскости xOy ; б) в системе координат xOy ?
4. Напишите уравнение сферы с диаметром AB , если $A(-2; 3; 0)$ и $B(2; -1; 4)$.
5. Изобразите множество точек пространства, заданных уравнением $x + y = 3$. Начните с пересечения его с плоскостью xOy .

Вариант 2

1. Напишите уравнение окружности на плоскости xOy с центром в точке $A(3; -2)$ радиуса 3.
 2. Напишите уравнение сферы в системе координат xOy с центром в точке $A(3; -2; 1)$ радиуса 2.
 3. Какую фигуру задает уравнение $(x - 3)^2 + y^2 = 3$: а) на плоскости xOy ; б) в системе координат xOy ?
 4. Напишите уравнение сферы с диаметром AB , если $A(3; -2; 0)$ и $B(-1; 2; 4)$.
 5. Изобразите множество точек пространства, заданных уравнением $x - y = 4$. Начните с пересечения его с плоскостью xOy .
-

С-34

К пп. 30.1—30.2

Вариант 1

1. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и вектор $\vec{AA_1}$. а) Вычислите $|\vec{AA_1}|$, если $AB = 3$, $AD = 4$, $B_1 D = 13$.
б) Найдите в грани $CDD_1 C_1$ вектор, равный вектору $\vec{AA_1}$; вектор, противоположный вектору $\vec{AA_1}$; вектор, не коллинеарный вектору $\vec{AA_1}$, но не перпендикулярный ему.
 2. Изобразите правильную треугольную пирамиду $PABC$ с основанием ABC . Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Верны ли утверждения: а) $\vec{PA} = \vec{PC}$; б) $|\vec{PA}| = |\vec{PC}|$; в) $\vec{PO} \perp \vec{BC}$; г) $\vec{PA} \perp \vec{BC}$?
-

Вариант 2

1. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и вектор $\vec{BC}$. а) Вычислите $|\vec{BC}|$, если $AB = 4$, $B_1 D = 10$, а $\angle(B_1 D; (DD_1 C_1 C)) = 60^\circ$. б) Найдите в грани $ADD_1 A_1$ вектор, равный вектору $\vec{BC}$; вектор, противоположный вектору $\vec{BC}$; вектор, не коллинеарный вектору $\vec{BC}$, но не перпендикулярный ему.
 2. Изобразите правильную треугольную пирамиду $MABC$ с основанием ABC . Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC . Верны ли утверждения: а) $\vec{MB} = \vec{MC}$; б) $|\vec{MB}| = |\vec{MC}|$; в) $\vec{MO} \perp \vec{AB}$; г) $\vec{MC} \perp \vec{AB}$?
-

Вариант 1

Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1. Назовите вектор: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1 D_1}$; г) $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1 B_1} - \overrightarrow{AB_1}$.

2. Запишите $\overrightarrow{A_1 C}$ в виде суммы трех векторов.

3. Запишите $\overrightarrow{CB}$ в виде разности двух векторов.

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей грани $AA_1 B_1 B$.

Отложите от точки A вектор, равный $-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DC_1}$, и вектор, равный $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Вариант 2

Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1. Назовите вектор: а) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{AD}$; д) $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D_1 A_1} - \overrightarrow{CD_1}$.

2. Запишите $\overrightarrow{B_1 D}$ в виде суммы трех векторов.

3. Запишите $\overrightarrow{DC}$ в виде разности двух векторов.

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$.

Отложите от точки D вектор, равный $\frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, и вектор, равный $-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B_1 A}$.

Вариант 1

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, точка M — середина ребра $B_1 C_1$, точка N — середина ребра DC . Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k , p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NA_1}$, $\overrightarrow{MN}$.

2. В тетраэдре $MABC$ $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$, точка P — середина ребра BC . Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k , p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MO}$, где точка O — центр тяжести треугольника ABC .

Вариант 2

1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, точка M — середина ребра $A_1 B_1$, точка N — середина ребра BC . Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k , p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{NA_1}$, $\overrightarrow{MN}$.
2. В тетраэдре $PABC$ $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$, точка P — середина ребра AB . Представьте в виде $k \cdot \vec{a} + p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, где k , p и q — числа, следующие векторы: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{PO}$, где точка O — центр тяжести треугольника ABC .

C-37

К пп. 31.1—31.2

Вариант 1

1. Известны координаты двух точек: $A(-2; 3; 5)$, $B(5; -1; -1)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если точка O — начало координат.
2. Даны координаты двух точек: $M(3, 2; 0; -5, 6)$, $N(x; y; z)$. Найдите x , y , z , если $\overrightarrow{MN} : (-2; 10; -12)$.
3. Даны координаты точек: $A(3, 2; 0; -5, 6)$, $B(-2, 8; 4; -3, 6)$. Точка C — середина AB . Найдите координаты $\overrightarrow{AC}$.
4. Известны координаты точек: $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $M(-6; 0; 6)$. Лежит ли точка M на прямой AB ?
5. Даны координаты точек: $A(2; 3; 4)$, $B(5; -1; 6)$, $C(7; -2; 1)$, $D(4; 2; -1)$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Вариант 2

1. Известны координаты двух точек: $A(3; -2; 5)$, $B(-1; 5; -1)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и длину вектора $\overrightarrow{BA}$, если точка O — начало координат.
2. Даны координаты двух точек: $P(1; -4; 3)$, $Q(x; y; z)$. Найдите x , y , z , если $\overrightarrow{QP} : (-12; -2; 10)$.
3. Даны координаты точек: $C(0; -3, 2; 5, 6)$, $D(-4; 2, 8; 3, 6)$. Точка A — середина CD . Найдите координаты $\overrightarrow{DA}$.
4. Известны координаты точек: $C(6; 0; -6)$, $D(5; 0; 3)$, $P(2; 0; 0)$. Лежит ли точка P на прямой CD ?
5. Даны координаты точек: $A(-1; 2; 4)$, $B(1; -2; 7)$, $C(6; -1; 5)$, $D(4; 3; 2)$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

Вариант 1

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб с ребром 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{D_1 D}$, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{B_1 A} \cdot \overrightarrow{B_1 C}$, $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Докажите, что $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a} (4; 5; -2)$ и $\vec{b} (7; -8; -6)$.
3. Вычислите $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$, если $\vec{a} (1; 2; 2)$ и $\vec{b} (4; 0; -3)$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Вычислите $(-\vec{a}) \cdot \vec{b}$, $(-\vec{a}) \cdot (-\vec{b})$, $3\vec{a} \cdot (-\vec{b})$.

Вариант 2

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб с ребром 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{DB}$.
2. Докажите, что $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a} (6; 8; -7)$ и $\vec{b} (2; -5; -4)$.
3. Вычислите $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$, если $\vec{a} (0; 3; -4)$ и $\vec{b} (2; 1; 2)$.
4. $\vec{c} \cdot \vec{d} = -3$. Вычислите $\vec{c} \cdot (-\vec{d})$, $(-\vec{c}) \cdot (-\vec{d})$, $3\vec{d} \cdot (-\vec{c})$.

Вариант 1

1. Известны координаты векторов: $\vec{a} (1; 0; 1)$, $\vec{b} (2; 1; 0)$, $\vec{c} (0; 3; -6)$, $\vec{d} (1; 2; 1)$; $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Докажите, что $\vec{x} \parallel \vec{c}$ и $\vec{x} \perp \vec{d}$.
2. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120^\circ$. Вычислите: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

Вариант 2

1. Известны координаты векторов: $\vec{a} (-1; 0; 1)$, $\vec{b} (1; -2; 0)$, $\vec{c} (6; -8; -2)$, $\vec{d} (0; 2; -8)$, $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Докажите, что $\vec{x} \parallel \vec{c}$ и $\vec{x} \perp \vec{d}$.
2. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ$. Вычислите: $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

Вариант 1

1. Известны координаты точек: $A(-1; 2; 3)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-2; 3; 0)$, $D(1; 3; 4)$. Определите величину угла между прямыми AB и CD .
2. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = 90^\circ$, $(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$.

Вариант 2

1. Известны координаты точек: $A(-1; 2; 3)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-2; 3; 0)$, $D(1; 3; 1)$. Определите величину угла между прямыми AC и BD .
2. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Вариант 1

1. Известны координаты точек: $A(-1; 2; 3)$, $B(3; 1; 0)$. Напишите уравнение плоскости β , перпендикулярной прямой AB и проходящей через точку $M(1; 1; -1)$. Лежат ли на плоскости β точки $D(0; 0; 0)$ и $P(2; -19; 7)$?
2. Плоскость β задана уравнением $2x - 3y + z = 6$. Найдите координаты точки пересечения этой плоскости с осями координат. Изобразите эти точки и линии пересечения плоскости с координатными плоскостями.

Вариант 2

1. Известны координаты точек: $C(-2; 3; 0)$, $D(1; 2; -4)$. Напишите уравнение плоскости δ , перпендикулярной прямой CD и проходящей через точку $M(1; -1; 1)$. Лежат ли на плоскости δ точки $O(0; 0; 0)$ и $P(2; 3; 1)$?
2. Плоскость δ задана уравнением $2x + 3y + z = 6$. Найдите координаты точки пересечения этой плоскости с осями координат. Изобразите эти точки и линии пересечения плоскости с координатными плоскостями.

С-1**(Треугольник и его элементы)****Вариант 1**

1. В треугольнике со сторонами 18, 24 и 30 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.
2. В треугольнике со сторонами 4 см и 8 см и углом между ними 120° найдите длины высоты и биссектрисы, проведенных к большей стороне.

Вариант 2

1. В треугольнике со сторонами 40, 32 и 24 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.
2. В треугольнике со сторонами 4 см и 10 см и углом между ними 60° найдите длины высоты и биссектрисы, проведенных к средней по длине стороне.

С-2**(Треугольник и его элементы)****Вариант 1**

1. В треугольнике ABC , где $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 18$ см, проведена окружность, касающаяся сторон AB и BC , центр которой (точка P) лежит на стороне AC . Найдите длину PB .
2. В треугольнике со сторонами 9, 18 и 12 проведена медиана к большей стороне. Найдите синус угла между медианой и средней по длине стороной.

Вариант 2

1. В треугольнике MPK , где $MP = 36$ см, $MK = 24$ см, $KP = 30$ см, проведена окружность, касающаяся сторон MK и KP , центр которой (точка O) лежит на стороне MP . Найдите длину отрезка OK .
2. В треугольнике со сторонами 6, 8 и 12 проведена медиана к большей стороне. Найдите синус угла между медианой и меньшей по длине стороной.

С-3 (Треугольники и вписанные (описанные) окружности)

Вариант 1

1. Определите радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами $5\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$ и 6.
 2. Определите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC , в котором угол C прямой, $AB = 17$ см, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{8}{15}$.
-

Вариант 2

1. Определите радиус окружности, описанной вокруг треугольника со сторонами $2\sqrt{3}$, 5 и $\sqrt{7}$.
 2. Определите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC , в котором угол C прямой, $AB = 26$ см, $\operatorname{tg} \angle B = \frac{5}{12}$.
-

С-4 (Треугольник и окружность)

Вариант 1

1. Катеты прямоугольного треугольника 6 см и 16 см. Определите диаметр окружности, проходящей через вершину прямого угла, вершину большего острого угла и середину большего катета.
 2. Вычислите площадь круга, описанного вокруг треугольника, одна из сторон которого равна 6 см, а углы, к ней прилежащие, 23° и 37° .
-

Вариант 2

1. Катеты прямоугольного треугольника 9 см и 24 см. Определите радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, вершину большего острого угла и середину большего катета.
 2. Вычислите площадь круга, описанного вокруг треугольника, одна из сторон которого равна $5\sqrt{2}$ см, а углы, к ней прилежащие, 111° и 24° .
-

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60° , $AB = 6$ см, биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E , причем $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
2. Периметр ромба равен 40 см, а сумма диагоналей равна 28 см. Найдите площадь ромба.

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ угол D равен 120° , $DC = 4$ см, биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке M , причем $\frac{AM}{MD} = \frac{5}{2}$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
2. Периметр прямоугольника равен 34 см, а его площадь равна 60 см^2 . Найдите сумму его диагоналей.

Вариант 1

1. Вокруг параллелограмма описана окружность радиуса 10 см. Угол между диагоналями параллелограмма равен 30° . Найдите площадь параллелограмма.
2. В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром P . $PC = 6$ см, $PD = 8$ см. Найдите радиус окружности и среднюю линию трапеции.

Вариант 2

1. Вокруг параллелограмма описана окружность радиуса 6 см. Площадь параллелограмма равна 36 см^2 . Найдите угол между диагоналями параллелограмма.
2. Вокруг окружности с центром M описана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Найдите радиус окружности и среднюю линию трапеции, если $MA = 12$ см, $MB = 9$ см.

Задачи для самостоятельной работы дома

Треугольники

1. В прямоугольном треугольнике ABC катет $CA = 15$, катет $CB = 20$. На гипотенузе AB взята точка D , такая, что $AD = 4$. Найдите длину отрезка CD .
(Ответ: 13.)
2. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна 13 см, а тангенс одного из углов равен $\frac{5}{12}$. Найдите площадь треугольника.
(Ответ: 120 см^2 .)
3. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 17 и катетом 15 найдите расстояния от точки пересечения медиан до меньшего катета.
(Ответ: 5.)
4. В прямоугольном треугольнике с катетами 15 см и 20 см найдите расстояния от точки пересечения медиан до гипотенузы.
(Ответ: 4.)
5. В равнобедренном треугольнике центр вписанной окружности делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки 5 см и 3 см, считая от вершины. Найдите длины сторон треугольника.
(Ответ: $4\sqrt{5}$ см; $4\sqrt{5}$ см; 8 см.)
6. В прямоугольном треугольнике косинус одного из углов равен $\frac{5}{13}$. Площадь треугольника равна 120 см^2 . Внутри треугольника взята точка P , удаленная от большего катета на 2 см, а от гипотенузы на 4 см. Найдите расстояния от точки P до меньшего катета.
(Ответ: 14 см.)
7. Докажите, что если катеты прямоугольного треугольника равны a и b , а гипотенуза равна c , то радиус вписанной окружности можно найти по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$.
8. В прямоугольный треугольник с катетами $3\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$ вписана окружность. Найдите расстояние от ее центра до вершины прямого угла.
(Ответ: 2.)

9. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
(Ответ: 14 см.)
10. Пусть BB_1 — медиана треугольника ABC , в котором $AC = 4,8$ см, $\angle A = 35^\circ$, $BB_1 = 2,4$ см. Найдите величину угла B .
(Ответ: 55° .)
11. В окружность радиуса 2,6 см вписан треугольник с периметром 12 см. Одна из сторон треугольника равна 4,8 см. Найдите площадь треугольника, если известно, что в нем нет тупого угла.
(Ответ: $4,8 \text{ см}^2$.)
12. Две стороны треугольника имеют длины 35 см и 14 см, а биссектриса угла между ними равна 12 см. Найдите площадь этого треугольника.
(Ответ: $232,5 \text{ см}^2$.)
13. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки P и Q так, что $AP : PB = 1 : 1$, $BQ : QC = 8 : 1$. Какую часть составляет площадь треугольника PQB от площади четырехугольника $APQC$?
(Ответ: 0,8.)
14. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 16. Чему равен радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, середину большего катета и вершину острого угла, противоположного этому катету?
(Ответ: 5.)
15. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 10 см, а к боковой стороне — 12 см.
(Ответ: 75 см^2 .)
16. В треугольник ABC , у которого сторона BC равна $2\sqrt{13}$, сторона AC равна 6, вписана окружность с центром P . Угол BPC вдвое больше угла BAC . Найдите площадь треугольника ABC .
(Ответ: $12\sqrt{3}$.)
17. В треугольник вписана окружность. Одна из сторон разделена точкой касания на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины других сторон треугольника, если радиус окружности равен 4 см.
(Ответ: 13 см, 15 см.)

18. Рассматриваются все треугольники, сумма двух сторон которых равна 6 см, а угол между ними 45° . Изобразите тот треугольник, который имеет наибольшую сторону.
(Ответ: 3 см и 3 см.)
19. В равнобедренный треугольник с основанием 6 см и углом при вершине 120° вписываются все возможные прямоугольники, две вершины которых лежат на основании. Изобразите этот треугольник и тот из прямоугольников, который имеет наибольшую площадь.
(Ответ: две вершины прямоугольника — середины боковых сторон треугольника.)
20. Периметр прямоугольного треугольника равен 60, а сумма квадратов длин всех сторон 1250. Найдите длину высоты, проведенной к гипотенузе.
(Ответ: 12.)
21. Длины медиан прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, равны $\sqrt{244}$ и $\sqrt{601}$. Найдите длину гипотенузы.
(Ответ: 26.)
22. Длина медианы прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 10, а к одному из катетов — $4\sqrt{13}$. Найдите длину третьей медианы.
(Ответ: $\sqrt{73}$.)
23. В треугольнике ABC $BC = 26$ см, $AC = 28$ см, $AB = 30$ см. Найдите площадь части треугольника, заключенной между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B .
(Ответ: 36 см^2 .)
24. Основание равнобедренного треугольника 16 см, а боковая сторона 10 см. Найдите отношение длин окружностей, описанной вокруг этого треугольника и вписанной в него.
(Ответ: $\frac{25}{8}$.)
25. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки длиной 8 см и 10 см, а центр вписанной в этот треугольник окружности делит эту биссектрису в отношении 3 : 2, считая от вершины. Найдите длины сторон треугольника.
(Ответ: 12 см, 15 см, 18 см.)
26. Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус вписанной в него окружности — 6 см. Найдите площадь треугольника.
(Ответ: 216 см^2 .)

27. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна $\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата, построенного на гипотенузе.
(Ответ: 1.)
28. В треугольнике ABC проведены две медианы $AA_1 = 15$ см и $CC_1 = 18$ см. Медианы пересекаются под прямым углом. Найдите площадь треугольника ABC .
(Ответ: 180 см^2 .)
29. Длины сторон треугольника относятся как $12 : 39 : 45$. Площадь его равна 96 см^2 . Определите радиусы окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной вокруг него.
(Ответ: 3 см, $16,25$ см.)
30. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки 5 см и 3 см, считая от вершины. Найдите длины сторон треугольника.
(Ответ: 10 см, 10 см, 12 см.)
31. Стороны треугольника имеют длины 13, 14 и 15. Построена окружность радиуса 5, concentрическая окружности, вписанной в данный треугольник. Найдите длины хорд, отсекаемых ею от сторон треугольника.
(Ответ: 6.)
32. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM . Точка O — центр вписанной в этот треугольник окружности делит эту биссектрису на отрезки BO и OM , такие, что $BO : OM = 2 : 1$. $AC = 7$, $BC = 8$. Найдите длину стороны AB .
(Ответ: 6.)
33. Периметр треугольника ABC равен 28. BB_1 и AA_1 — биссектрисы треугольника, пересекающиеся в точке O . Известно, что $AB = BB_1$ и $BO = 2OB_1$. Найдите длину стороны AB .
(Ответ: 8.)
34. На стороне AB треугольника ABC взята точка P так, что $BP = \frac{1}{4} AB$, $\angle ACP = 60^\circ$, $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка CP .
(Ответ: 2.)

35. Одна из сторон треугольника в 3 раза короче другой. Найдите величину угла между ними, если отношение длины биссектрисы этого угла к длине большей стороны равно $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (Ответ: 90° .)
36. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отложены отрезки $AM = 3$, $AN = 7$, $BN = 3$. Найдите площадь треугольника CMN , если $CM = 6$. (Ответ: $\frac{3\sqrt{39}}{2}$.)
37. Стороны AB и BC треугольника ABC пересечены двумя прямыми, параллельными стороне AC . Получившиеся при этом фигуры равновелики. Найдите длины отрезков, образовавшихся на стороне AB , если $AB = 3$. (Ответ: $\sqrt{3}$; $\sqrt{6} - \sqrt{3}$; $3 - \sqrt{6}$.)
38. Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Угол BOC вдвое больше угла BAC . $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 8$. Найдите длину AB . (Ответ: 2 или 6.)
39. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CK . Площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPK равна 2, $PK = 2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC . (Ответ: 4,5.)
40. В треугольнике ABC $AB = BC = 6$ см. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке P так, что $BP : PC = 2 : 1$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию треугольника ABC . (Ответ: $\sqrt{30}$ см.)
41. В прямоугольном треугольнике ABC (AB — гипотенуза) медиана CM равна 12 см, а расстояние от середины катета AC до гипотенузы равно 3 см. Найдите площадь треугольника ABC . (Ответ: 72 см^2 .)
42. BP — медиана треугольника ABC . Известно, что $BC : BP : BA = 4 : 3 : 6$, $CA = 2\sqrt{17}$ см. Найдите периметр треугольника ABC . (Ответ: $10 + 2\sqrt{17}$ см.)
43. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, равен $\sqrt{2} - 1$. Найдите длину высоты, проведенной к основанию. (Ответ: 1.)

44. Катеты прямоугольного треугольника a и $2a$. На большем из них как на диаметре построена окружность. На какие отрезки окружность делит гипотенузу?

(Ответ: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$; $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$.)

Метод координат

1. На координатной плоскости xOy расположен прямоугольный треугольник ABC . Вершина прямого угла C лежит на положительной полуоси ординат, точка A имеет координаты $(2; 0)$, а абсцисса вершины B равна 8. Найдите ординату точки B , если площадь треугольника равна 34.
(Ответ: 10 или 32,5.)
2. Даны точки $A(-5; 4)$, $B(3; 2)$, $C(-2; 7)$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный, и запишите уравнение окружности, описанной вокруг этого треугольника.
(Ответ: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 17$.)
3. Точки A и B — точки пересечения прямой $y = 2x + 1$ и окружности $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Найдите координаты точки C , принадлежащей окружности, если угол ABC прямой и абсцисса точки A меньше абсциссы точки B .
(Ответ: $\left(-\frac{7}{5}; \frac{21}{5}\right)$.)
4. В треугольнике ABC $CA = CB$, CM — медиана и $A(-3; 2)$, $C(1; 6)$. Напишите уравнение окружности, описанной вокруг треугольника ACM .
(Ответ: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$.)
5. Точка P лежит на прямой $2x - y + 5 = 0$ и равноудалена от центров окружностей $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ и $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 11$. Найдите координаты точки P .
(Ответ: $(-3; -1)$.)

Четырехугольники

1. Рассматриваются всевозможные прямоугольники с периметром 12 см. Каковы размеры того из них, у которого наибольшая площадь?
(Ответ: квадрат со стороной 3 см.)
2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 100^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$. Найдите угол BDC .
(Ответ: 60° .)
3. Можно ли вписать окружность в равнобокую трапецию с основаниями 2 см и 8 см и высотой 4 см?
(Ответ: да.)

4. Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются под углом 60° . Площадь трапеции равна $9\sqrt{3}$. Найдите длину высоты трапеции.
(Ответ: 3 или $3\sqrt{3}$.)
5. Боковые стороны трапеции лежат на взаимно перпендикулярных прямых. Основания трапеции 4 и 10. Найдите сумму квадратов диагоналей трапеции.
(Ответ: 116.)
6. В равнобедренной трапеции одно из оснований вдвое больше другого. Диагональ делит острый угол при основании пополам. Найдите периметр трапеции, если ее площадь равна $27\sqrt{3}$ см².
(Ответ: 30 см.)
7. Длины оснований трапеции $2\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$. Длины боковых сторон равны $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от середины одной боковой стороны до прямой, на которой лежит другая боковая сторона.
(Ответ: 4,5.)
8. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD . $AB = 30$ и $CD = 24$, $AD = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$. Диагонали пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника BCM .
(Ответ: $10\sqrt{3}$.)
9. Вокруг окружности радиуса 5 см описан параллелограмм с острым углом 45° . Найдите площадь параллелограмма.
(Ответ: $100\sqrt{2}$ см².)
10. У параллелограмма, описанного вокруг окружности радиуса 7, одна из диагоналей равна 20. Найдите радианную меру большего угла параллелограмма.
(Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{50}\right)$.)
11. В квадрате $ABCD$ взята точка M , такая, что углы MAD и MDA составляют по 15° . Найдите величины углов треугольника MBC .
(Ответ: все углы равны 60° .)
12. Найдите площадь параллелограмма, высота которого 4 см, а длины диагоналей 5 см и $2\sqrt{13}$ см.
(Ответ: 36 см².)
13. Четырехугольник $ABCD$ выпуклый, в нем угол CDA прямой, $DC = 2$, $DA = 3$, $AB = 3$, $BC = 1$. Найдите тангенс угла BDA .
(Ответ: $4 - \sqrt{3}$.)

14. Определите величину острого угла ромба в радианах, если площадь ромба равна S , а площадь вписанного в него круга равна Q .

(Ответ: $\arcsin \frac{4Q}{\pi S}$.)

15. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, диаметром которой является AB . Угол между прямыми AD и BC равен α . Найдите отношение CD к AB .

(Ответ: $\cos \alpha$.)

Окружность и круг

1. Точка O делит хорду некоторой окружности в отношении $1 : 4$. Найдите длину самой короткой хорды, проходящей через точку O , если длина данной хорды 10 см.

(Ответ: 8 см.)

2. Площадь кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями, равна S . Большой радиус равен длине меньшей окружности. Выразите через S радиус меньшей окружности.

(Ответ: $\sqrt{\frac{S}{\pi \cdot (4\pi^2 - 1)}}$.)

3. Из точки A к кругу проведена касательная AB и секущая ACD . Определите площадь треугольника CDB , если площадь треугольника ABC равна 20, а $AC : CB = 2 : 3$.

(Ответ: 45.)

4. В круге с диаметром AB проведена хорда CD . AB и CD пересекаются в точке M так, что $CM = 3$, $MD = 4$. Известно, что радиус окружности равен 4. Найдите величину угла между прямыми AB и CD .

(Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$.)

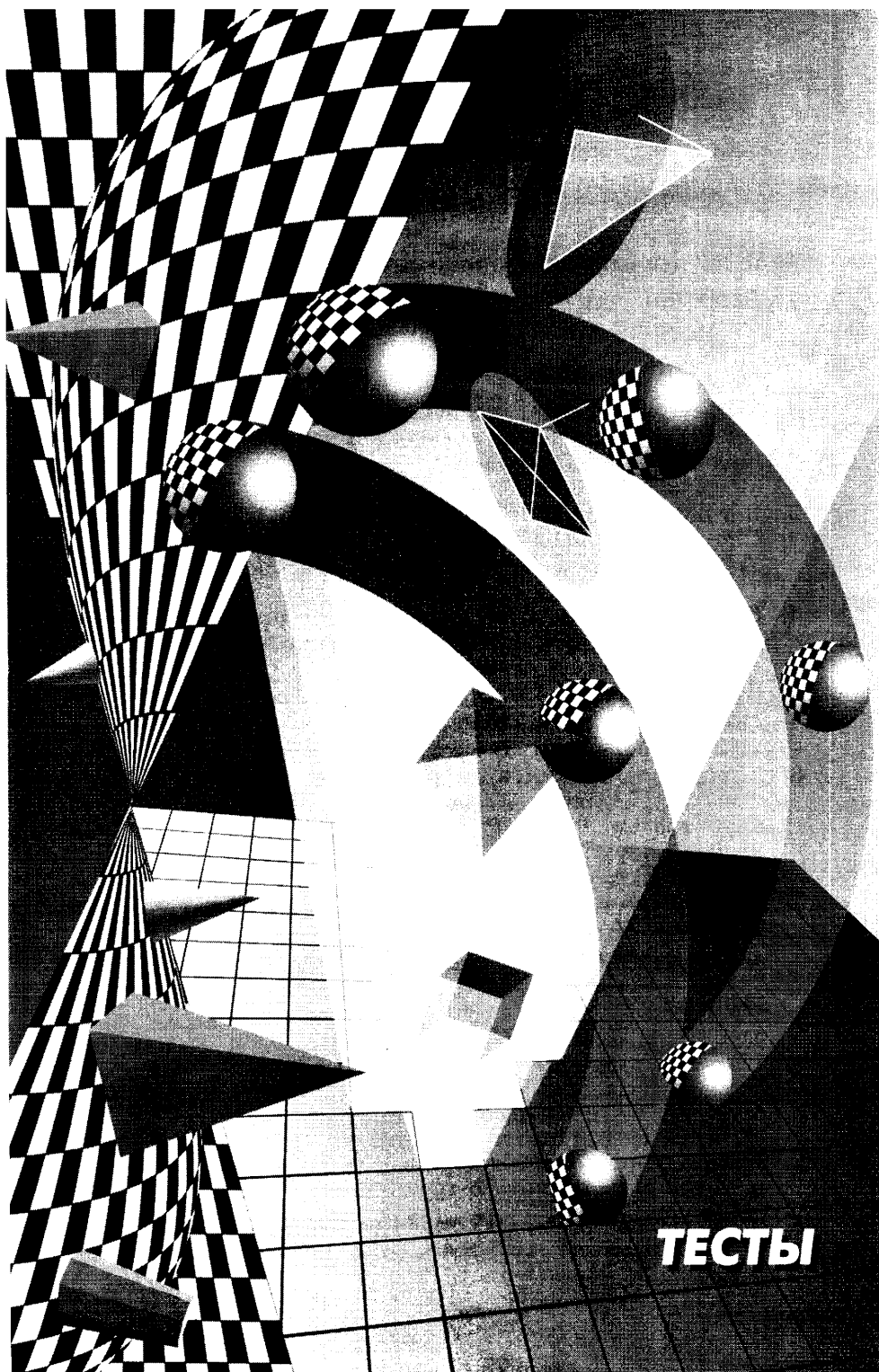
5. Две окружности, радиусы которых R и $3R$, касаются друг друга внешним образом. К ним проведена общая внешняя касательная. Определите площадь фигуры, ограниченной касательной и двумя окружностями.

(Ответ: $\frac{R^2}{6} \cdot (24\sqrt{3} - 11\pi)$.)

6. Дуга AB окружности с центром в точке O радиуса R содержит α градусов. Найдите длину хорды AB .

(Ответ: $2R \sin \frac{\alpha}{2}$.)

7. Радиус круга равен 13 см. В нем проведены две хорды: $AB = 15,6$ см и $BC = 10$ см. Найдите длину хорды AC .
(Ответ: 22,4 см или 6,4 см.)
8. Треугольник ABC со стороной $AB = 4$ и углом A , равным 60° , вписан в окружность радиуса $2\sqrt{3}$. Найдите длину средней линии этого треугольника, параллельной AC , и расстояние между точками, в которых продолжение средней линии пересекает окружность.
(Ответ: $\sqrt{6}+1$; $2\sqrt{10}$.)
9. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Точка O — точка пересечения его диагоналей. $AB = CD = 10$, $AD > BC$. Расстояние от точки B до стороны AD равно 6, а площадь треугольника OAD равна 50. Найдите длины сторон AD и BC и радиус окружности.
(Ответ: 20; 4; $5\sqrt{5}$.)
10. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его сторону AB в точке M , а сторону BC в точке K . Найдите величину угла BMC , если $KC : BC = 1 : 2$, $BK : AM = 2 : 7$, угол ABC равен 60° .
(Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$.)
11. Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют общую хорду AB , при этом угол AO_1B равен 60° . Отношение длины первой окружности к длине второй равно $\sqrt{2}$. Найдите величину угла AO_2B .
(Ответ: 90° .)
12. Расстояние между центрами окружностей с радиусами 1 см и 4 см равно $5\sqrt{3}$ см. К ним проведена общая внешняя касательная. Найдите радиус окружности, которая касается двух данных окружностей и общей касательной.
(Ответ: 1 см или 9 см.)
13. В сектор окружности с углом 60° вписан круг, касающийся радиусов и дуги, ограничивающей сектор. Во сколько раз площадь сектора больше площади этого круга?
(Ответ: в 1,5 раза.)



ТЕСТЫ

10 КЛАСС

Тест №1 (Повторение планиметрии)

1. В треугольнике ABC со сторонами 5 см, 12 см и 13 см синус меньшего из углов равен:
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{5}{13}$; г) $\frac{5}{7}$.
2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 90° , а основание треугольника равно 12 см. Площадь треугольника равна:
а) 72 см^2 ; б) 36 см^2 ; в) $12\sqrt{2} \text{ см}^2$; г) $36\sqrt{3} \text{ см}^2$.
3. В треугольнике ABC со сторонами 5, 12 и 15 косинус большего из углов равен:
а) $\frac{5}{12}$; б) $-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $-\frac{7}{15}$.
4. В треугольнике ABC , где угол C прямой, $CA = 12$, $CB = 16$, медиана, проведенная к гипотенузе, равна:
а) 10; б) 7,5; в) 8; г) 6.
5. В треугольнике ABC , где $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{6}$, длина стороны AB равна:
а) $2\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) 3; г) $1,5\sqrt{6}$.
6. В треугольнике ABC , где $AB = 12 \text{ дм}$, $AC = 15 \text{ дм}$ и $\angle A = 30^\circ$, сторона AC разделена точками K и P на равные отрезки $AK = KP = PC$, тогда площадь треугольника BPC равна:
а) $1,5 \text{ м}^2$; б) $0,15 \text{ м}^2$; в) 12 дм^2 ; г) 60 дм^2 .
7. В треугольнике ABC $AB = 6$, $AC = 4$ и $\angle A = 60^\circ$, треугольник MNP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{3}{2}$. Большая сторона треугольника MNP равна:
а) $3\sqrt{7}$; б) $7\sqrt{3}$; в) 12; г) 9.
8. В треугольнике ABC $AB = 6 \text{ см}$, $AC = 8 \text{ см}$, $BC = 10,5 \text{ см}$, AK — биссектриса. Длина большего из отрезков BK и KC равна:
а) 6 см; б) 4,5 см; в) 5,25 см; г) 7 см.
9. Две стороны равнобедренного треугольника равны 6 см и 14 см. Площадь этого треугольника равна:
а) 98 см^2 ; б) $3\sqrt{187} \text{ см}^2$; в) 84 см^2 ; г) $6\sqrt{187} \text{ см}^2$.
10. В треугольнике ABC $BA = 8 \text{ см}$, $BC = 10 \text{ см}$. На сторо-

не BA отложен отрезок BM , равный 5 см, а на стороне BC — отрезок BK , равный 4 см. Площадь треугольника MBK составляет от площади треугольника ABC :

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 0,4.

11. Если в треугольнике ABC угол A тупой, $\sin A = \frac{12}{13}$,

$AB = 13$, $AC = 3$, то длина стороны BC равна:

а) $4\sqrt{14}$; б) $4\sqrt{17}$; в) $4\sqrt{11}$; г) $4\sqrt{13}$.

12. В прямоугольном треугольнике высота и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол 15° . Косинус угла, смежного с меньшим углом этого треугольника, равен:

а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. Периметр прямоугольного треугольника равен 72 м, а радиус вписанной в него окружности равен 6 м. Тогда диаметр описанной вокруг этого треугольника окружности равен:

а) 30 м; б) 15 м; в) 24 м; г) 12 м.

14. В ABC вписана окружность с центром O . Луч AO пересекает сторону BC в точке K . $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6,5$. Площадь треугольника ABC равна:

а) 80 см^2 ; б) 84 см^2 ; в) $87,5 \text{ см}^2$; г) 90 см^2 .

Тест № 2 (Повторение планиметрии)

1. Если в параллелограмме $ABCD$ AM — биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки $BM = 2$ см, $MC = 4$ см, то периметр параллелограмма равен:

а) 20 см; б) 16 см; в) нельзя определить; г) 24 см.

2. Периметр ромба равен 40 см, а одна из диагоналей 12 см, тогда радиус вписанной в ромб окружности равен:

а) 9,6 см; б) 4,8 см; в) 4 см; г) 5,6 см.

3. В прямоугольнике $ABCD$ $BC > AB$, диагональ AC равна 13, расстояние от точки B до AC равно 6, тогда тангенс угла CAD равен:

а) 0,6; б) 1; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{3}$.

4. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BCA = 30^\circ$, $AC = 10$, тогда площадь прямоугольника равна:

а) $25\sqrt{3}$; б) 25; в) 75; г) $37,5$.

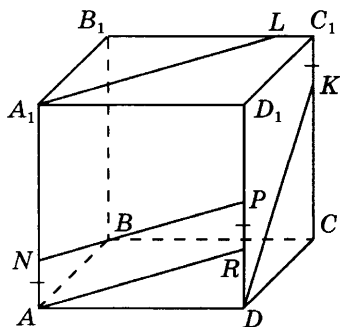
5. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина BC . Площадь параллелограмма 12, тогда площадь треугольника AMD :

а) 6; б) 8; в) определить нельзя; г) 4.

6. В окружность радиуса 6,5 вписан параллелограмм, одна из сторон которого равна 5, тогда другая сторона равна:
а) 10; б) 7; в) нельзя определить; г) 12.
7. В параллелограмм вписана окружность радиуса 3. Один из углов параллелограмма равен 30° . Периметр параллелограмма равен:
а) определить нельзя; б) 48; в) 36; г) 40.
8. В равнобокую трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции равна 8. Средняя линия трапеции равна:
а) 6; б) 12; в) 8; г) 10.
9. В трапеции $ABCD$, где $AB \parallel CD$, O — точка пересечения диагоналей. $AB : CD = 1 : 3$. Площадь треугольника AOD равна 5, тогда площадь треугольника COD равна:
а) 15; б) 20; в) 45; г) 10.
10. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, O — точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника AOB равна 10, тогда площадь треугольника COD равна:
а) 10; б) 12; в) определить нельзя; г) 8.
11. Диагонали параллелограмма 8 и 12, а одна из сторон $2\sqrt{19}$. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом:
а) 50° ; б) 60° ; в) все другие ответы неверны; г) 90° .
12. Сумма всех углов правильного многоугольника 720° . Его сторона равна 4. Площадь этого многоугольника равна:
а) $24\sqrt{3}$; б) $24\sqrt{2}$; в) 48; г) $12\sqrt{6}$.
13. Площадь правильного восьмиугольника равна $72\sqrt{2}$ см², тогда радиус окружности, в которую он вписан, равен:
а) 8; б) 9; в) 6; г) определить нельзя.
14. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, $BC = 10$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle D = 30^\circ$. Высота трапеции равна 10. Площадь трапеции равна:
а) $150 + 50\sqrt{3}$; б) 120; в) $100 + 70\sqrt{3}$; г) 150.

Тест № 3 (Главы I и II)

1. Из слов «да», «нет» вычеркните, глядя на рисунок куба, ненужное так, чтобы утверждение оказалось верным (здесь знак $\cdot$ обозначает скрещивающиеся прямые, а знак $\times$ — пересекающиеся прямые или прямые и плоскости):
а) $A_1L \parallel NP$ да, нет;



- б) $NP \parallel AR$ да, нет;
- в) $A_1L \perp DD_1$ да, нет;
- г) $NP \times BB_1$ да, нет;
- д) $A_1L \times D_1C_1$ да, нет;
- е) $NP \times AD$ да, нет;
- ж) $A_1L \parallel (ABC)$ да, нет;
- з) $A_1L \parallel (NAP)$ да, нет;
- и) $KD \times (A_1B_1C_1)$ да, нет;
- к) $(NAP) \parallel (BB_1C_1)$ да, нет;
- л) $KD \perp (AD)$ да, нет;
- м) $NA \perp AL$ да, нет.

2. На примере данного куба опровергните утверждения:
- а) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

б) Если две прямые лежат в параллельных плоскостях, то они параллельны.

в) Если две прямые перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны между собой.

г) Если две прямые скрещиваются с третьей прямой, то они скрещиваются между собой.

д) Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости.

Тест № 4 (Глава III)

1. В треугольнике ABC $AB = AC$, $\angle A = 150^\circ$, $AC = 10$. Проведена прямая BD , перпендикулярная плоскости ABC . Расстояние от прямой BD до прямой AC равно:
 - а) 5; б) $5\sqrt{3}$; в) $5\sqrt{2}$; г) невозможно определить.
2. В треугольнике ABC $AB = AC$, $\angle A = 150^\circ$, $AC = 10$. Через точку B проведен перпендикуляр к плоскости ABC и на нем отложен отрезок $BD = 12$. Расстояние от точки D до прямой AC равно:
 - а) 15; б) $15\sqrt{3}$; в) 13; г) $13\sqrt{3}$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $AB = 10$. Катет AC расположен в плоскости α , а точка B удалена от плоскости α на 4. Тангенс угла наклона плоскости треугольника ABC к плоскости α равен:
а) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $AB = 10$. Гипотенуза AB расположена в плоскости α , а точка C удалена от плоскости α на 2,4. Синус угла наклона плоскости треугольника ABC к плоскости α равен:
а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 1.
5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания 6, а боковое ребро 8. Косинус угла наклона диагонали C_1B грани BB_1C_1C к плоскости основания равен:
а) 0,6; б) 0,8; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{3}{4}$.
6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания 6, а боковое ребро 8. Синус угла наклона диагонали C_1B грани BB_1C_1C к плоскости боковой грани AA_1B_1B равен:
а) $\frac{6\sqrt{3}}{17}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; г) 1,7.
7. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $BC = 4$ см. Точка M находится вне плоскости треугольника ABC и удалена от нее на расстояние 3 см. При этом она равноудалена от всех вершин треугольника ABC . Точка M удалена от каждой из вершин на:
а) 4 см; б) 6,5 см; в) 5 см; г) 2 см.
8. Площадь треугольника ABC равна 84 см^2 , а его периметр равен 42 см. Точка M находится вне плоскости треугольника и удалена от этой плоскости на расстояние 3 см. При этом она равноудалена от всех сторон треугольника ABC . Точка M удалена от каждой из сторон на расстояние:
а) 5 см; б) 2 см; в) 4 см; г) 10,4 см.
9. Сторона AC треугольника ABC расположена в плоскости α , а вершина B — вне плоскости α . Плоскость ABC перпендикулярна плоскости α . Если $BC = 10$, $\cos C = 0,8$, то точка B удалена от плоскости α на расстояние:
а) 8; б) 6; в) 5; г) 10.
10. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре BB_1 взята точка K , такая, что $B_1 K : KB = 1 : 2$. В кубе построено сечение плоскостью KAC . Тангенс угла наклона этого сечения к плоскости ABC равен:
а) 2; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

11. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4 расстояние между прямыми $C_1 C$ и $B_1 D$ равно:
а) 4; б) $2\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{2}$; г) определить невозможно.
12. Равнобокая трапеция $ABCD$, где $BC \parallel AD$, расположена так, что AD лежит в плоскости α , а точка B в плоскости α не лежит. $AB = CD = 5$, $BC = 6$, $AD = 12$. Плоскость трапеции наклонена к плоскости α под углом 30° . Расстояние от прямой BC до плоскости α равно:
а) 2; б) 3; в) 4; г) определить невозможно.
13. Квадрат $ABCD$ и правильный треугольник PDC не лежат в одной плоскости. Диагональ квадрата равна $8\sqrt{2}$ см. Точка P удалена от прямой AB на расстояние 10 см. Косинус угла между плоскостями квадрата и треугольника равен:
а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{16}$; г) 0,8.
14. Ромб $ABCD$ со стороной 4 см и углом 60° и правильный треугольник PDC не лежат в одной плоскости. Точка P удалена от прямой AB на расстояние 2 см. Косинус угла между плоскостями ромба и треугольника равен:
а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) 0; г) 0,4.



Тест № 1 (Пространственные фигуры. Глава IV)

1. Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 12,5. $AB = 12$, $BC = 16$, $AC = 20$. Расстояние от центра сферы до плоскости ABC равно:
а) 7,5; б) 10; в) 6; г) 5.
2. Стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. $AB = 41$, $AC = 40$, $BC = 9$. Расстояние от центра сферы до плоскости ABC равно:
а) 3; б) 2; в) 4; г) 6.
3. В основании прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм, в котором $AB = 6$, $AD = 10$, $\angle BAD = 45^\circ$. Параллелепипед пересечен плоскостью ADK , причем точка K находится на ребре CC_1 . Если $((ADK) \wedge (ABC)) = 45^\circ$, то площадь сечения параллелепипеда плоскостью ADK равна:
а) $60\sqrt{2}$; б) 60; в) нельзя определить; г) $60\sqrt{3}$.
4. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Если $CA = CB = CC_1 = 2\sqrt{2}$, то площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины ребер $C_1 A_1$, $C_1 B_1$, $B_1 B$, равна:
а) $2\sqrt{3}$ см²; б) $3\sqrt{3}$ см²; в) $1,5\sqrt{3}$ см²; г) определить невозможно.
5. В наклонной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ все ребра равны по 2 см. Углы $A_1 AB$ и $A_1 AC$ — острые и равны между собой. Площадь грани $BB_1 C_1 C$ равна:
а) 4 см²; б) $2\sqrt{2}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ см²; г) определить невозможно.
6. В прямом круговом цилиндре высотой 5 см проведен отрезок MN длиной 13 см, концы которого лежат на окружностях верхнего и нижнего оснований. Если радиус основания 10 см, то расстояние от оси цилиндра до отрезка MN равно:
а) $6\sqrt{3}$ см; б) 4,5 см; в) 8 см; г) 10 см.
7. В наклонной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ двугранный угол при боковом ребре AA_1 равен 120° , расстояния от ребра $A_1 A$ до ребер $B_1 B$ и $C_1 C$ равны соответственно 4 см и 6 см. Тогда если $A_1 A = \sqrt{19}$ см, то площадь грани $BB_1 C_1 C$ равна:
а) $19\sqrt{3}$ см²; б) $4\sqrt{19}$ см²; в) 38 см²; г) $2\sqrt{3}$ см².

8. Если диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с основанием угол 45° , с одной из боковых граней угол 30° , то с другой боковой гранью эта диагональ образует угол:
а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) $\arctg 2$.
9. Если в правильной треугольной пирамиде тангенс угла наклона бокового ребра к плоскости основания равен a , то тангенс угла наклона боковой грани к плоскости основания равен:
а) a ; б) $\frac{1}{2}a$; в) $\frac{2}{3}a$; г) $2a$.
10. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны по $5\sqrt{5}$ см, значит, высота пирамиды равна:
а) 5 см; б) 10 см; в) $10\sqrt{2}$ см; г) $7\sqrt{5}$ см.
11. В основании пирамиды лежит параллелограмм, диагонали которого 6 см и 8 см. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Площадь каждой боковой грани равна:
а) 12 см^2 ; б) 16 см^2 ; в) 20 см^2 ; г) 8 см^2 .
12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, в котором биссектриса делит катет на отрезки 3 и 5. Боковая грань, содержащая гипотенузу основания, — правильный треугольник, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания. Площадь сечения, проходящего через медиану к гипотенузе основания и вершину пирамиды, равна:
а) 25; б) $25\sqrt{3}$; в) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{25}{2}$.
13. Осевое сечение конуса — треугольник, две стороны которого равны 8 см и 20 см. Угол наклона образующей к плоскости основания равен:
а) $\arctg 2\sqrt{6}$; б) $\arcsin 0,4$; в) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$; г) $\arccotg \frac{\sqrt{6}}{3}$.
14. В конус с высотой PO вписали правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ (основание пирамиды вписано в основание конуса). Оказалось, что все ребра пирамиды равны. Если радиус основания конуса равен R , то расстояние от центра основания конуса до боковой грани пирамиды равно:
а) $R\sqrt{3}$; б) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{R}{2}$; г) $R\sqrt{2}$.
15. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$. Проекцией

вершины P на плоскость ABC является точка O — точка высоты, проведенной к стороне BC . Ребро PA наклонено к основанию под углом 45° , а боковая грань PBC — под углом 75° . Площадь боковой грани PBC равна:

а) $14\sqrt{3}$; б) $56\sqrt{2}$; в) 28; г) $28\sqrt{6}$.

Тест № 2 (Объемы тел)

- В прямоугольном параллелепипеде длины трех диагоналей граней, выходящих из одной вершины параллелепипеда, равны соответственно 5, $\sqrt{34}$ и $\sqrt{41}$. Объем параллелепипеда равен:
а) 60; б) $10\sqrt{34}$; в) $10\sqrt{41}$; г) 120.
- В основании наклонного параллелепипеда лежит параллелограмм, диагонали которого 8 и 10, а угол между ними 30° . Боковое ребро пирамиды равно 10 и наклонено к основанию под углом 60° . Объем параллелепипеда равен:
а) 199; б) $75\sqrt{3}$; в) $100\sqrt{3}$; г) 150.
- Все ребра наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a . Боковая грань AA_1C_1C — ромб с углом 60° при вершине A . Плоскость этой грани перпендикулярна к плоскости основания. Объем призмы равен:
а) $\frac{3}{4}a^3$; б) $\frac{3}{8}a^3$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$; г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.
- Объем правильной треугольной призмы равен $2\sqrt{6}$ дм³. Диагональ боковой грани наклонена к плоскости другой грани под углом 30° . Сторона основания этой призмы равна:
а) 2; б) 4; в) 1,5; г) $2\sqrt{2}$.
- Радиус основания цилиндра равен 3 см. Диагональ осевого сечения наклонена к основанию под углом α , синус которого 0,8. Объем этого цилиндра равен:
а) 288π см³; б) 216π см³; в) 72π см³; г) 100π см³.
- Шар с центром O касается плоскости α в точке M . На плоскости проведена прямая a , которая удалена от точки M на 12 см, а от точки O на 13 см. Объем шара равен:
а) $\frac{520\pi}{3}$ см³; б) $\frac{169\pi}{9}$ см³; в) 200π см³; г) $\frac{500\pi}{3}$ см³.
- Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник, площадь которого $4\sqrt{3}$ дм². Объем этого конуса равен:
а) $\frac{8\pi}{3}$ дм³; б) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ дм³; в) $\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}$ дм³; г) $12\pi\sqrt{3}$ дм³.

8. Прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 6 вращают вокруг большего катета. Объем полученного тела вращения равен:
а) 96π ; б) $76,8\pi$; в) 120π ; г) 144π .
9. Прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 и катетом 6 вращают вокруг гипотенузы. Объем полученного тела вращения равен:
а) 96π ; б) $76,8\pi$; в) 120π ; г) 144π .
10. В основании пирамиды — трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $AB = 13$, $AD = 14$, $BD = 15$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом $\arctg \frac{16}{13}$. Объем пирамиды равен:
а) 130; б) 150; в) 360; г) 160.
11. В основании пирамиды — трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, $BC = 8$, $AD = 18$. Все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . Объем такой пирамиды равен:
а) 450; б) 390; в) 288; г) 312.
12. В основании пирамиды $PABCD$ — квадрат $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45° . Диагональ основания равна $2\sqrt{2}$ дм. Объем такой пирамиды равен:
а) 3 дм^3 ; б) $\frac{8}{3} \text{ дм}^3$; в) $\frac{7}{3} \text{ дм}^3$; г) $2\sqrt{2} \text{ дм}^3$.
13. В основании пирамиды $PABCD$ — ромб $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 45° , угол ABC равен 120° . Высота пирамиды равна h . Объем пирамиды равен:
а) $\frac{1}{3}h^3$; б) $\frac{1}{3}h^3$; в) $2h^3 \frac{\sqrt{3}}{9}$; г) $\frac{2}{9}h^3$.
14. Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Площадь основания равна 20 дм^2 . Радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен 4 дм. Объем пирамиды равен:
а) 80 дм^3 ; б) 120 дм^3 ; в) $40\pi \text{ дм}^3$; г) $90\pi \text{ дм}^3$.
15. Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Площадь основания равна 20 дм^2 . Площадь полной поверхности равна:
а) 40 дм^2 ; б) 60 дм^2 ; в) 80 дм^2 ; г) 65 дм^2 .

Тест № 3 (Площади поверхностей тел. Векторы)

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC , в котором $AB = AC = 10$ и медиана $BM = \sqrt{97}$. Высота призмы равна 5. Площадь полной поверхности призмы равна:
а) 256; б) 288; в) 394; г) 300.
2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 10, двугранный угол при боковом ребре AA_1 равен 120° . Ребро AA_1 удалено от ребер BB_1 и CC_1 на расстояния, отношение которых равно $\frac{2}{3}$, а расстояние от BB_1 до CC_1 равно $3\sqrt{19}$. Площадь боковой поверхности этой призмы равна:
а) $150 + 30\sqrt{19}$; б) $45\sqrt{19}$; в) $100 + 10\sqrt{19}$; г) $19\sqrt{19} + 75$.
3. В цилиндр вписана правильная треугольная призма со стороной основания a и высотой $a\sqrt{3}$. Площадь полной поверхности цилиндра равна:
а) $\frac{8\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$; б) $3\pi a^2$; в) $\frac{8}{3}\pi a^2$; г) $\frac{4}{3}\pi a^2$.
4. В конус вписана правильная треугольная пирамида со стороной основания a и высотой $a\sqrt{3}$. Площадь полной поверхности конуса равна:
а) $\frac{1}{3}\pi a^2(1 + \sqrt{10})$; б) $\pi a^2(\sqrt{3} + 1)$; в) $\pi a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; г) $\pi a^2(\sqrt{6} + \sqrt{10})$.
5. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC , в котором $CA = 10$, $CB = 24$, $AB = 26$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, грань PAC наклонена к нему под углом 45° . Площадь полной поверхности этой пирамиды равна:
а) $120(6 + \sqrt{3})$; б) $120(6 + \sqrt{2})$; в) $120(\sqrt{3} + \sqrt{2})$; г) $120(8 + \sqrt{2})$.
6. В основании пирамиды $PABC$ лежит треугольник ABC , в котором $CA = 10$, $CB = 24$, $AB = 26$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, грань PAC наклонена к нему под углом 45° . Площадь поверхности сферы, описанной вокруг пирамиды, равна:
а) 1252π ; б) $13\,854\pi$; в) 1502π ; г) 1604π .
7. В основании пирамиды — ромб с диагоналями 12 см и 16 см. Все боковые грани наклонены к плоскости осно-

вания под углом 60° . Площадь поверхности шара, вписанного в эту пирамиду, равна:

а) $30,84\pi$; б) $30,72\pi$; в) $20\sqrt{3}\pi$; г) $24\sqrt{34}$.

8. Известны координаты точек: $A(-1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$, $P(-5; -2; 5)$, $Q(1; -2; -3)$. $\vec{a} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{PQ}$. Сумма координат вектора $\vec{a}$ равна:

а) 0; б) -2; в) 2; г) 3.

9. Известны координаты точек: $A(-1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$, $P(-5; -2; 5)$, $Q(1; -2; -3)$. Косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{PQ}$ равен:

а) -0,48; б) 0,24; в) 0,48; г) 0.

10. Векторы $\vec{a}(4; m; m+5)$ и $\vec{b}(m-9; 9; 2m)$ коллинеарны при m , равном:

а) 12; б) -7,5; в) -3; г) 9,4.

11. Векторы $\vec{a}(4; m+2; -2)$ и $\vec{b}(m-6; 2; m)$ перпендикулярны при m , равном:

а) -2,4; б) 2; в) -7,5; г) 5.

12. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$ равно:

а) 12; б) -12; в) 18; г) -18.

13. Плоскости $2x - 3y + 5z = 10$ и $-5x + 7,5y - 12,5z = -25$: а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются под углом 60° .

14. Плоскости $2x - 3y + 5z = 10$ и $11x + 4y - 2z = 6$: а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются под углом 60° .

Тест № 4 (Повторение всего курса геометрии. Планиметрия)

1. Две вершины квадрата лежат на окружности радиуса R , а две другие — на касательной к этой окружности. Длина диагонали квадрата равна:

а) $1,6\sqrt{2}R$; б) $\frac{4R\sqrt{2}}{5}$; в) $\frac{8}{5}R^2\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{2}R$.

2. Две вершины квадрата лежат на одной окружности радиуса 5, а две другие вершины — на другой окружности радиуса $\sqrt{13}$, имеющей с первой окружностью общий центр. Площадь квадрата равна:

а) 36; б) 2; в) 9 или 0,5; г) 36 или 2.

3. Основания трапеции 4 и 8. Длина отрезка, проходяще-

го через точку пересечения ее диагоналей параллельно основаниям трапеции, концы которого лежат на боковых сторонах, равна:

а) 6; б) $\frac{16}{3}$; в) 5; г) 7,5.

4. Вокруг окружности радиуса $2\sqrt{2}$ описана равнобедренная трапеция, основания которой относятся как 2 : 1. Длина диагонали этой трапеции равна:

а) 7; б) 9; в) $\sqrt{78}$; г) $\sqrt{38}$.

5. Если стороны треугольника имеют длины $6\sqrt{5}$; $8\sqrt{5}$; $10\sqrt{5}$, то медиана и биссектриса, проведенные к средней стороне, имеют длины:

а) $2\sqrt{65}$ и 15; б) $2\sqrt{13}$ и $3\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{85}$ и 15; г) $2\sqrt{65}$ и 14.

6. В прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные к большему катету, равны соответственно $3\sqrt{61}$ и $5\sqrt{13}$. Тогда длина большего катета равна:

а) 15; б) 36; в) 39; г) $12\sqrt{3}$.

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 , пересекающиеся в точке O . Отрезок AB равен 12. Отношение отрезков AO к OA_1 равно 4 : 3, BO к OB_1 равно 3 : 2. Площадь треугольника ABC равна:

а) $35\sqrt{23}$; б) $23\sqrt{35}$; в) 156; г) 221.

8. В треугольнике ABC : $BC = 17$, $AC = 10$, $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$. Длина стороны AB равна:

а) 21; б) 12; в) 9; г) 10.

9. На основании равнобедренного треугольника, как на диаметре, построена окружность, которая делит боковые стороны в отношении 1 : 3, считая от вершины треугольника. Радиус окружности равен 3, тогда площадь треугольника равна:

а) $9\sqrt{7}$; б) $6\sqrt{15}$; в) $3\sqrt{15}$; г) $18\sqrt{7}$.

10. Отношение сторон параллелограмма равно 2 : 3, его диагонали пересекаются под углом 60° . Косинус тупого угла параллелограмма равен:

а) $\frac{\sqrt{69}}{12}$; б) $-\frac{\sqrt{69}}{12}$; в) $\frac{\sqrt{45}}{12}$; г) $-\frac{\sqrt{45}}{12}$.

11. Рассматриваются всевозможные равнобедренные трапеции, боковая сторона которых равна 3, а одно из оснований — 7. Другое основание трапеции, имеющей наибольшую площадь, равно:

а) 9; б) 10; в) 12; г) 15.

12. Уравнение окружности, проходящей через точки $A(5; -3)$ и $B(-2; -4)$, и центр которой лежит на пря-

мой, проходящей через точки $C(-2; 1)$ и $P(0; -3)$, имеет вид:

а) $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 25$; б) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$;

в) $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 25$; г) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

13. Вершины треугольника ABC заданы своими координатами: $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$, $C(6; 3)$. Точки M и P – середины сторон AB и BC соответственно. На прямой AC взята точка K , такая, что угол KMP равен 45° . $KA > KC$. Координаты точки K :

а) $(3; 5)$; б) $(5; 3)$; в) $(4; 3)$; г) $(3; 4)$.

14. Сторона треугольника равна 12, а углы, к ней прилежащие, равны $11^\circ 54'$ и $18^\circ 06'$. Тогда длина окружности, описанной вокруг этого треугольника, равна:

а) 12π ; б) 24π ; в) 144π ; г) $12\pi^2$.

15. В правильный шестиугольник вписан круг площадью S . Тогда площадь шестиугольника равна:

а) $\frac{2\sqrt{3}S}{\pi}$; б) $\frac{3\sqrt{2}S}{\pi}$; в) $\frac{3\sqrt{2}S}{\pi}$; г) $\frac{6\pi}{\sqrt{S}}$.

Тест № 5 (Повторение всего курса геометрии. Стереометрия)

1. В пирамиду $PABC$ вписана пирамида $PADEF$ так, что ее основание – ромб $ADEF$ вписан в треугольник ABC . Точки D , E , F лежат на сторонах AB , BC и AC соответственно. Известно, что $BE : EC = 3 : 2$, $AE = 24$, $DF = 18$. Объем пирамиды $PADEF$ составляет от объема пирамиды $PABC$ такую часть:

а) $\frac{12}{25}$; б) $\frac{7}{24}$; в) $0,8$; г) $0,23$.

2. Вокруг прямоугольного параллелепипеда описана сфера диаметра $6\sqrt{3}$ см. Известно, что в этот параллелепипед можно вписать сферу. Тогда ее радиус равен:

а) $2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 3 ; г) $3\sqrt{3}$.

3. Вокруг шара радиуса 4 описана правильная треугольная призма. Радиус шара, описанного вокруг этой призмы, равен:

а) $4\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{5}$; в) $2\sqrt{15}$; г) $4,5\sqrt{5}$.

4. В основании пирамиды $PABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого 6 см и 8 см пересекаются под прямым углом. Высота пирамиды 10 см. Объем пирамиды $PA_1B_1C_1D_1$, где точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 соответственно середины сторон AB , BC , CD и DA , равен:

а) 30 см^3 ; б) 36 см^3 ; в) 24 см^3 ; г) 40 см^3 .

5. В треугольной пирамиде две боковые грани равны. Если косинусы трех плоских углов при вершине пира-

миды равны $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$, то косинус угла между равными боковыми гранями равен:

а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{5}$; в) $\frac{6}{5}$; г) $-0,3$.

6. В конус вписан шар и вокруг него описан шар. Радиус вписанного шара равен 1, а описанного — 5. Расстояние между центрами шаров равно:

а) $\sqrt{15}$; б) 4; в) $\sqrt{17}$; г) 10.

7. В конус, у которого радиус основания равен 15, а образующая — 25, вписан шар. Длина линии, по которой касаются поверхность шара и поверхность конуса, равна:

а) 16π ; б) 20; в) 12π ; г) 48.

8. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна 9, а расстояние от нее до противоположащего бокового ребра равно 12. Тогда объем призмы равен:

а) 36; б) 108; в) 63; г) 54.

9. Основанием наклонной призмы служит равносторонний треугольник со стороной a . Одна из боковых граней — ромб, меньшая диагональ которого равна $\frac{2}{3}a$.

Эта грань перпендикулярна к плоскости основания. Объем призмы равен:

а) $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$; б) $\frac{a^2\sqrt{6}}{9}$; в) $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$; г) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

10. В основании прямой призмы, высота которой 25, лежит треугольник со сторонами 5, 12 и 13. Расстояние от центра вписанной в этот треугольник окружности до самой дальней от него вершины призмы равно:

а) 30; б) 27; в) $20\sqrt{3}$; г) $15\sqrt{5}$.

11. Все плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые. Боковые ребра пирамиды равны 10, 16 и $8\sqrt{5}$. Радиус шара, описанного вокруг этой пирамиды, равен:

а) $8\sqrt{2}$; б) 14; в) 13; г) $4\sqrt{2}$.

12. На поверхности шара взяты три точки A , B и C , такие, что хорды AB , BC и CA имеют длины 40, 40 и 48. Расстояние от центра шара до плоскости ABC равно 60. Радиус шара равен:

а) 50; б) 65; в) 60; г) 100.

13. На поверхности шара взяты три точки A , B и C , такие, что хорды AB , BC и CA имеют длины 40, 40 и 48. В плоскости ABC проведены прямые, касательные к

сфере. Радиус шара равен 15. Расстояние от центра шара до плоскости ABC равно:

а) 9; б) 10; в) 12; г) 20.

14. В правильной треугольной призме стороны оснований равны a ; боковые ребра равны $2a$. Через одну из сторон основания проводится плоскость под углом 60° к плоскости основания. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна:

а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

15. В правильной треугольной призме все ребра равны a . Через одну из сторон основания проводится плоскость под углом 60° к плоскости основания. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна:

а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
-------------------	---

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

10 КЛАСС	6
----------------	---

Глава I. Основания стереометрии	8
---------------------------------------	---

Глава II. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей	19
--	----

Глава III. Проекции. Расстояния. Углы	30
---	----

11 КЛАСС	43
----------------	----

Глава IV. Пространственные фигуры	—
---	---

Глава V. Объемы тел и площади их поверхностей	55
--	----

Глава VI. Координаты и векторы	59
--------------------------------------	----

Глава VII. Планиметрия	65
------------------------------	----

Задачи для самостоятельной работы дома	68
--	----

ТЕСТЫ

10 КЛАСС	78
----------------	----

11 КЛАСС	84
----------------	----



Учебное издание

Серия «Академический школьный учебник»

Евстафьева Лариса Петровна

ГЕОМЕТРИЯ

Дидактические материалы
10—11 классы

Пособие для общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *Т. Ю. Акимова*

Младший редактор *С. В. Дубова*

Художники *А. С. Побезинский, О. Г. Иванова*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Технический редактор и верстальщик *И. М. Капранова*

Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции

ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01.

Подписано в печать с оригинал-макета 16.01.14. Формат 60 × 90¹/₁₆.

Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная.

Уч.-изд. л. 4,06. Тираж 1500 экз. Заказ № м 704 (Ир.-Sm).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».

214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1

Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70

E-mail: spk@smolpk.ru <http://www.smolpk.ru>